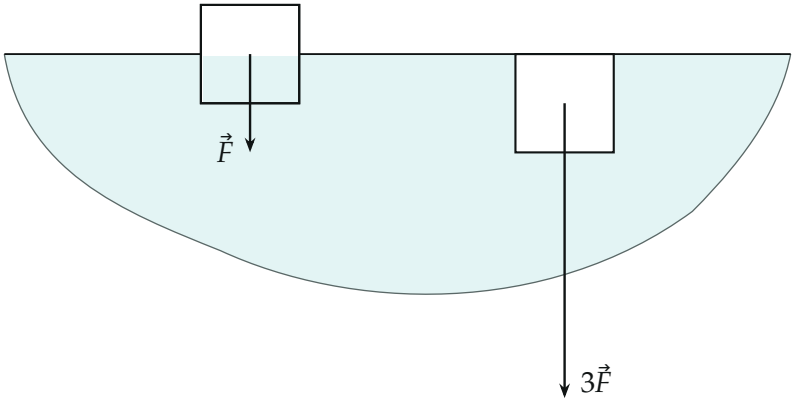
Кубик, погружаемый силой вниз

Задача 3. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Кубик плавает в воде. Чтобы кубик был погружен в воду наполовину, к нему необходимо приложить силу F, направленную вниз. Чтобы полностью погрузить в воду — силу $3F$, направленную вниз. Найти плотность вещества кубика. Плотность воды ρ_0 известна.



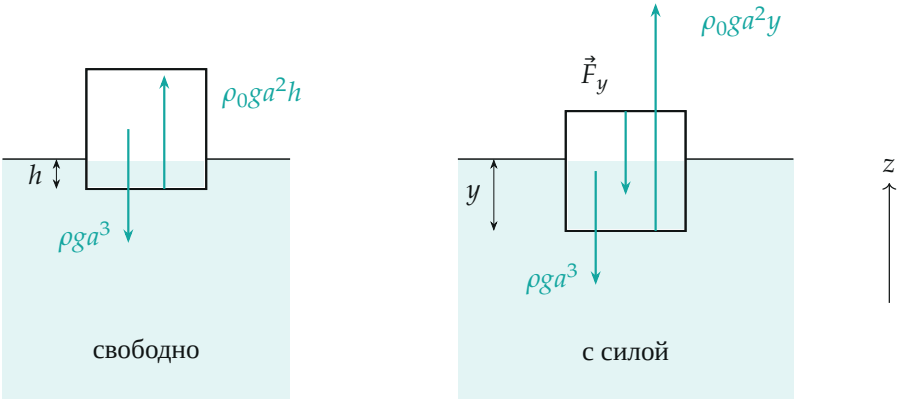
▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на равновесие плавающего тела (гидростатика: закон Архимеда плюс условие равновесия). Сила Архимеда растёт пропорционально глубине погружения кубика, поэтому дополнительная сила, нужная для притапливания, пропорциональна *дополнительной* глубине по сравнению со свободным плаванием. Два данных положения дают отношение двух таких глубин, из него — глубину свободного плавания, а она прямо связана с плотностью.

Обозначения. a — ребро кубика; ρ — плотность кубика; h — глубина погружения свободно плавающего кубика; y — глубина погружения кубика под действием силы; $x = h/a$; ось z — вертикально вверх.

1. Свободное плавание. На кубик действуют сила тяжести $\rho g a^3$ вниз и сила Архимеда $\rho_0 g a^2 h$ (вес вытесненной воды объёмом $a^2 h$) вверх. Второй закон Ньютона в проекции на ось z (кубик покоится):

$$\rho_0 g a^2 h - \rho g a^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{a} = x.$$

Значит, плотность кубика задаёт доля ребра, которая уходит под воду при свободном плавании.



Силы на кубик при свободном плавании и при притапливании силой F_y (длины стрелок — примерно по модулю)

2. Кубик притоплен силой. Пусть сила F_y вниз удерживает кубик на глубине y. Второй закон Ньютона в проекции на ось z:

$$\rho_0 g a^2 y - \rho g a^3 - F_y = 0.$$

Подставим $\rho g a^3 = \rho_0 g a^2 h$ из пункта 1:

$$F_y = \rho_0 g a^2 \,(y - h).$$

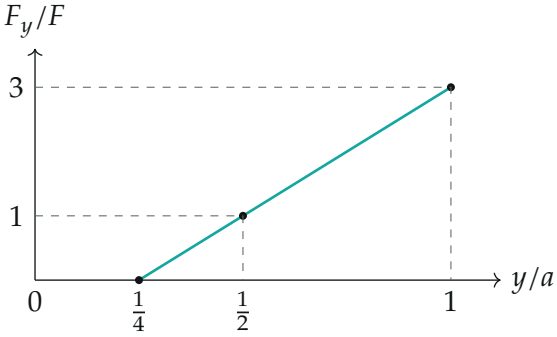
Нужная сила равна весу воды в *дополнительно* погружённом объёме $a^2(y - h)$ и растёт линейно с глубиной.

3. Два данных положения. Наполовину ($y = a/2$) и полностью ($y = a$):

$$F = \rho_0 g a^3 \Big(\frac{1}{2} - x\Big), \qquad 3F = \rho_0 g a^3 \,(1 - x).$$

Делим второе на первое:

$$3 = \frac{1 - x}{\frac{1}{2} - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} - 3x = 1 - x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

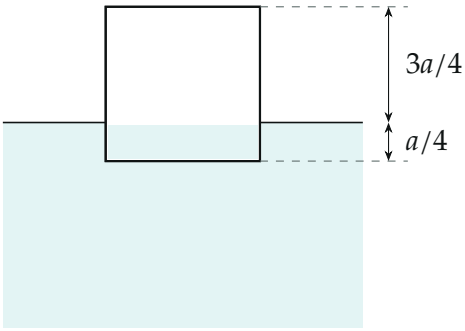


Нужная сила линейно растёт с глубиной погружения и обращается в нуль на глубине свободного плавания $h = a/4$; точки — данные условия

4. Плотность. Из пункта 1:

$$\rho = x\,\rho_0 = \frac{\rho_0}{4} \quad (250\ \text{кг/м}^3 \text{ при } \rho_0 = 1000\ \text{кг/м}^3).$$

5. Второй способ — по графику. Из пункта 2 сила F_y линейна по y. Поднимаясь от $y = a$ к $y = a/2$, сила падает на $3F - F = 2F$; значит, на каждую четверть ребра она меняется на F. От $y = a/2$ до нуля силы ещё одна четверть ребра: $h = a/2 - a/4 = a/4$, и $\rho/\rho_0 = h/a = 1/4$.



Свободно плавающий кубик: под водой четверть ребра

Обратите внимание. Сила F уравновешивает не весь вес кубика и не всю силу Архимеда, а только *прирост* силы Архимеда сверх веса. Если забыть про вес кубика и написать $F = \rho_0 g a^3/2$, $3F = \rho_0 g a^3$, получится противоречие ($3F \neq 2F$).

Проверка. Размерность: $\rho = x\rho_0$, x безразмерна — верно. Подстановка: при $x = \frac{1}{4}$ получаем $F = \rho_0 g a^3 \cdot \frac{1}{4}$ и $3F = \rho_0 g a^3 \cdot \frac{3}{4}$ — отношение 3, как в условии. Знак: $\rho < \rho_0$, кубик и должен плавать.

Смысл: доля погружённого ребра свободно плавающего кубика равна отношению плотностей, а линейный рост выталкивающей силы с глубиной позволяет найти эту долю по двум «притопленным» положениям.

Ответ. $\rho = \dfrac{\rho_0}{4}$ (при $\rho_0 = 1000$ кг/м^3 это 250 кг/м^3).