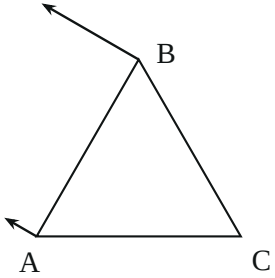
Скользящий фанерный треугольник

Задача 4. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Вырезанный из листа фанеры равносторонний треугольник ABC скользит по горизонтальному столу. В некоторый момент времени скорости вершин A и B перпендикулярны стороне AB и равны v и $3v$ соответственно (см. рисунок, вид сверху). Найти величину скорости вершины C в этот момент.



▲ **Решение. Что происходит.** Кинематика плоского движения твёрдого тела. Треугольник жёсткий, поэтому его движение в каждый момент — поступательное движение вместе с одной точкой плюс вращение вокруг неё с общей для всего тела угловой скоростью ω. Скорости двух вершин задают и поступательную часть, и ω; скорость третьей вершины после этого вычисляется однозначно. Решим тремя способами: через нерастяжимость сторон (как у организаторов), через сложение скоростей и через мгновенный центр вращения.

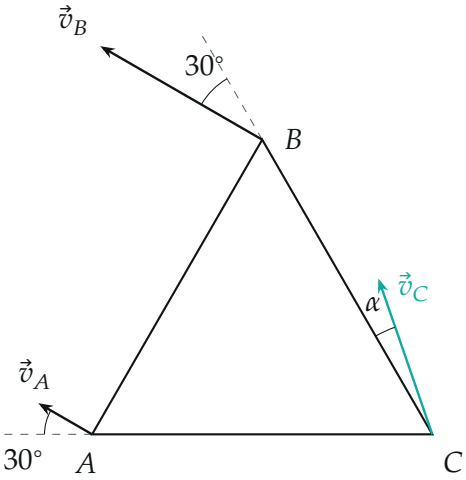
Обозначения. a — сторона треугольника; $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ — скорости вершин, $v_C = |\vec{v}_C|$ — искомое; ω — угловая скорость треугольника; α — угол между $\vec{v}_C$ и стороной CB.

1. Условие нерастяжимости. Расстояние между любыми двумя точками жёсткого тела не меняется, поэтому проекции их скоростей на соединяющую их прямую равны (иначе отрезок удлинялся бы или укорачивался). Для стороны AB это выполнено автоматически: обе скорости перпендикулярны AB, их проекции на AB равны нулю.

Сторона AC составляет со стороной AB угол $60°$, а $\vec{v}_A \perp AB$, поэтому угол между $\vec{v}_A$ и прямой AC равен $90° + 60° = 150°$, а с продолжением

CA за точку A — 30°. Так же $\vec{v}_B$ составляет угол 30° с продолжением CB за точку B (рисунок ниже). Значит, проекции на стороны (по направлению от C к другой вершине)

$$v_{A,CA} = v\cos 30^\circ, \qquad v_{B,CB} = 3v\cos 30^\circ.$$



Скорости вершин. Штрих — продолжения сторон CB и CA; скорость $\vec{v}_B$ составляет с продолжением CB угол 30°, скорость $\vec{v}_A$ с продолжением CA — тоже 30°

Скорость $\vec{v}_C$ составляет со стороной CB угол α, а со стороной CA — угол $\alpha + 60^\circ$ (между сторонами 60°). Условия нерастяжимости сторон BC и AC:

$$v_C\cos\alpha = 3v\cos 30^\circ, \qquad v_C\cos(\alpha + 60^\circ) = v\cos 30^\circ.$$

Делим второе на первое и раскрываем косинус суммы:

$$\frac{1}{3} = \frac{\cos\alpha\cos 60^\circ - \sin\alpha\sin 60^\circ}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ и

$$v_C = \frac{3v\cos 30^\circ}{\cos\alpha} = \frac{3v\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{7}\,v.$$

2. Второй способ: поступательное движение плюс вращение. Введём оси: x — вдоль AC, y — перпендикулярно, в сторону B. Тогда $A = (0,0)$, $C = (a,0)$, $B = (\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$, а единичный вектор, перпендикулярный AB и направленный как скорости, $\vec{n} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Скорость любой точки жёсткого тела

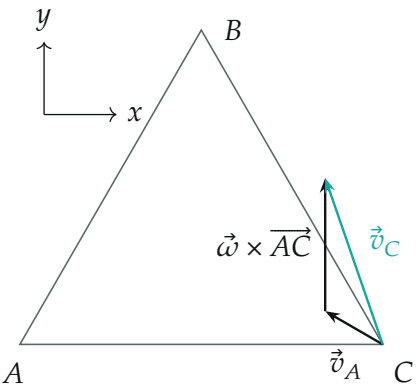
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AP}.$$

Для точки B: $\vec{v}_B - \vec{v}_A = 2v\,\vec{n}$, а $\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB} = \omega a\,\vec{n}$ (поворот вектора $\overrightarrow{AB}$ на 90° против часовой стрелки), отсюда

$$\omega = \frac{2v}{a} \quad \text{(против часовой стрелки).}$$

Для точки C: $\vec{\omega}\times\overrightarrow{AC} = \omega a\,(0,1) = (0,\,2v)$, и

$$\vec{v}_C = v\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2},\,\frac{1}{2}\Big) + (0,\,2v) = v\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2},\,\frac{5}{2}\Big), \qquad v_C = v\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{7}\,v.$$

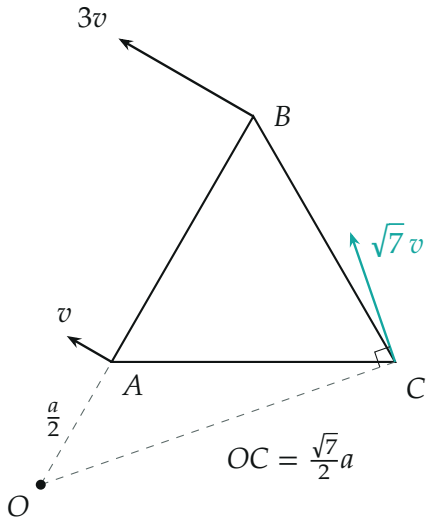


Сложение скоростей в точке C: поступательная часть $\vec{v}_A$ (как у вершины A) и вращательная $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}$ длиной $\omega a = 2v$

3. Третий способ: мгновенный центр вращения. В данный момент треугольник вращается вокруг точки O, скорость которой равна нулю; скорость каждой точки перпендикулярна радиусу из O и пропорциональна ему. Скорости A и B перпендикулярны AB, поэтому O лежит на прямой AB, а из $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{1}{3}$ и $OB - OA = a$ находим $OA = \dfrac{a}{2}$, $OB = \dfrac{3a}{2}$ (O — на продолжении BA за точку A), $\omega = \dfrac{v}{OA} = \dfrac{2v}{a}$. По теореме косинусов в треугольнике OAC (угол $OAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$):

$$OC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cos 120^\circ = \frac{7}{4} a^2,$$

$$v_C = \omega \cdot OC = \frac{2v}{a} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} a = \sqrt{7}\, v.$$



Мгновенный центр вращения O на продолжении BA; скорость $\vec{v}_C$ перпендикулярна радиусу OC

Обратите внимание. Скорость $\vec{v}_C$ не перпендикулярна AB: она направлена под углом $\alpha \approx 10{,}9°$ к стороне CB. Ответ «$2v$» (среднее v и $3v$ плюс что-то «по аналогии») неверен — скорость C имеет и составляющую вдоль AB из-за вращения.

Проверка. Размерность — скорость. Три способа дали одно и то же $\sqrt{7}\,v \approx 2{,}65\,v$. Предельный случай: если бы $v_A = v_B = v$, вращения не было бы ($\omega = 0$) и все вершины двигались бы одинаково, $v_C = v$; по формуле второго способа при $v_B = v_A$ получаем $\omega = 0$ и $\vec{v}_C = \vec{v}_A$ — верно.

Смысл: две скорости точек жёсткого тела однозначно задают его движение в данный момент — поворот вокруг мгновенного центра O, и скорость любой точки пропорциональна её расстоянию до O.

Ответ. $v_C = \sqrt{7}\,v$.