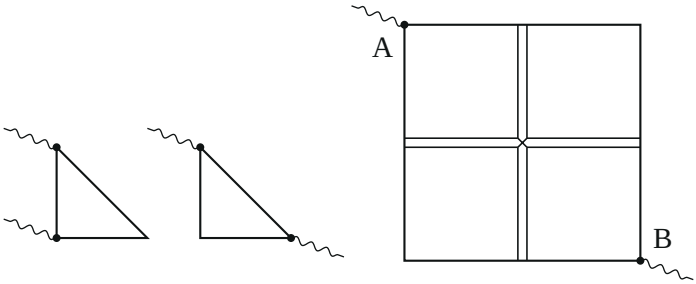
Сопротивление пластинки-треугольника и квадратов

Задача 5. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Из металлической пластинки вырезали прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами a. Если включить треугольник в электрическую цепь так, как показано на левом рисунке, его сопротивление равно r, а если как на среднем — R. Из той же пластинки вырезали четыре квадрата со стороной a и соединили по углам проволочками с нулевым сопротивлением (правый рисунок). Найти сопротивление между точками A и B.



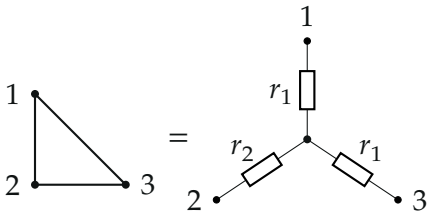
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на сопротивление сплошных проводников, которые включены в цепь только в нескольких точках. Пластинка с тремя выводами без источников внутри — линейный «трёхполюсник», и для внешней цепи она в точности эквивалентна звезде из трёх резисторов. Две данные в условии величины r и R определяют эту звезду. Квадраты придётся свести к треугольникам: симметрия цепи позволяет разрезать каждый квадрат по диагонали, не меняя токов. После этого остаётся цепь из звёзд, и её сопротивление считается последовательными и параллельными соединениями.

Обозначения. r_1 — плечо звезды у острого угла треугольника, r_2 — у прямого угла (у двух острых углов плечи одинаковы: треугольник равнобедренный и симметричен относительно высоты из прямого угла); X — искомое сопротивление; квадраты: ЛВ, ПВ, ЛН, ПН (левый верхний и т. д.).

1. Треугольник — звезда. Любая цепь из резисторов с тремя выводами для внешних цепей эквивалентна звезде: токи через выводы линейно зависят от потенциалов выводов, а у звезды как раз три свободных параметра. Подключение «по катету» (левый рисунок: острый угол и прямой угол) и «по гипотенузе» (средний рисунок: два острых угла) — это последовательные соединения двух плеч звезды:

$$r_1 + r_2 = r, \qquad 2r_1 = R \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{R}{2}, \qquad r_2 = r - \frac{R}{2}.$$

Для существования звезды нужно $r_2 > 0$, то есть $2r > R$.

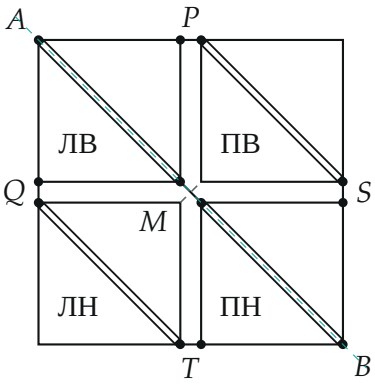


Треугольник с выводами в вершинах (1, 3 — острые углы, 2 — прямой) и эквивалентная ему звезда. Между 1 и 2 — сопротивление $r_1 + r_2 = r$, между 1 и 3 — $2r_1 = R$

2. Симметрия цепи. Цепь квадратов симметрична относительно прямой AB (диагонали всего большого квадрата): при отражении в ней точка A переходит в себя, B — в себя, квадрат ЛН — в ПВ. Значит, симметричные точки имеют одинаковые потенциалы. Проволочка, соединяющая внутренние углы квадратов ЛН и ПВ, соединяет две симметричные точки — ток по ней не течёт, её можно убрать. После этого квадраты ПВ и ЛН подключены к цепи только двумя углами каждый — концами своей диагонали, параллельной AB.

3. Разрезы по диагоналям. Квадраты ЛВ и ПН симметричны относительно своих диагоналей, лежащих на AB; квадраты ПВ и ЛН — относительно своих диагоналей, на которых лежат оба их вывода. На оси симметрии нормальная составляющая тока равна нулю (потенциал по обе стороны одинаков), поэтому ток эти диагонали не пересекает. Разрежем все четыре квадрата по таким диагоналям, сохранив соединения

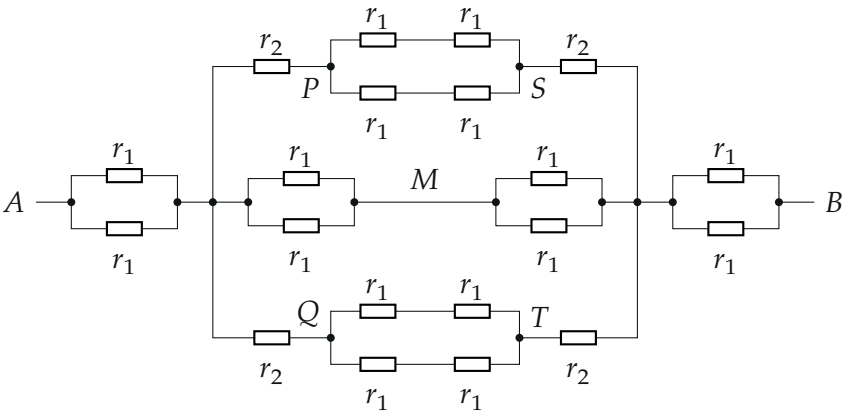
в вершинах: токи не изменятся, а каждый квадрат станет парой прямоугольных равнобедренных треугольников — таких же, как в условии.



Квадраты, разрезанные по диагоналям (двойные линии); соединения проволочками сохранены. Бирюзовый штрих — ось симметрии AB; серая проволочка в центре тока не несёт и убрана

Обозначим узлы: P — соединённые углы ЛВ и ПВ, Q — ЛВ и ЛН, S — ПВ и ПН, T — ЛН и ПН, M — внутренние углы ЛВ и ПН (соединены проволочкой). Квадрат ЛВ даёт две звезды с острыми углами в A и M и прямыми углами в P и Q; квадрат ПН — две звезды с острыми углами в M и B и прямыми в S и T; квадрат ПВ между P и S — два треугольника, включённых «по гипотенузе», каждый $2r_1$, вместе r_1; так же квадрат ЛН между Q и T.

4. Эквивалентная цепь. Центры двух звёзд квадрата ЛВ симметричны относительно AB, их потенциалы равны — соединим их в один узел N_1; так же центры звёзд ПН — в узел N_2. Получаем: от A к N_1 — два r_1 параллельно; от N_1 к N_2 — три параллельные ветви: через P и S (r_2, квадрат ПВ, r_2), через M ($\frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2}$), через Q и T (r_2, квадрат ЛН, r_2); от N_2 к B — два r_1 параллельно.



Эквивалентная цепь (N_1, N_2 — узлы, где расходятся и сходятся три ветви): квадраты ЛВ и ПН дали пары r_1 у A, B и у M, плечи r_2 к узлам P, Q, S, T; квадраты ПВ и ЛН — по две цепочки $r_1 + r_1$

5. Сопротивление. Пары r_1 параллельно дают $r_1/2$. Верхняя ветвь: $r_2 + r_1 + r_2 = 2r_2 + r_1$ (две цепочки по $2r_1$ параллельно — это r_1); нижняя — такая же; средняя — $r_1/2 + r_1/2 = r_1$. Верхняя и нижняя вместе — $\frac{2r_2+r_1}{2}$, с ними параллельно средняя:

$$r_{N_1N_2} = \frac{r_1 \cdot \frac{2r_2+r_1}{2}}{r_1 + \frac{2r_2+r_1}{2}} = \frac{r_1(2r_2 + r_1)}{2r_2 + 3r_1}.$$

Добавляем последовательно $r_1/2$ у A и $r_1/2$ у B:

$$X = r_1 + \frac{r_1(2r_2 + r_1)}{2r_2 + 3r_1} = \frac{r_1\,(2r_2 + 3r_1 + 2r_2 + r_1)}{2r_2 + 3r_1} = \frac{4r_1\,(r_1 + r_2)}{3r_1 + 2r_2}.$$

6. Через данные условия. Подставляем $r_1 = \frac{R}{2}$, $r_1 + r_2 = r$, $3r_1 + 2r_2 = 2r + \frac{R}{2} = \frac{4r + R}{2}$:

$$X = \frac{4 \cdot \frac{R}{2} \cdot r}{\frac{4r+R}{2}} = \frac{4rR}{4r + R}.$$

У организаторов в последнем упрощении потеряно слагаемое: вместо $4r_1(r_1+r_2)$ в числителе записано $r_1(4r_2+r_1)$, отсюда их ответ $\frac{R(8r-3R)}{2(4r+R)}$; верный ответ — $\frac{4rR}{4r+R}$.

Обратите внимание.

- Разрезать квадраты ПВ и ЛН по диагонали можно только после того, как убрана центральная проволочка между ними: пока к квадрату подходит ток в третьем углу, его диагональ не ось симметрии.
- Звезда заменяет треугольник только для внешней цепи: плечи r_1, r_2 — не сопротивления каких-то частей пластинки.

Проверка. Размерность: $\frac{rR}{r+R}$ — ом. Независимый расчёт: цепь из восьми звёзд (без объединения узлов и без использования симметрии) решена методом узловых потенциалов на python; например, при $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ (Ом) получено $X = 1{,}7143$ Ом, по формуле $\frac{4\cdot1\cdot3}{3+4} = \frac{12}{7} = 1{,}7143$ Ом — совпадает (ответ организаторов дал бы 1,2857 Ом). Красивая форма ответа: $\frac{1}{X} = \frac{1}{4r} + \frac{1}{R}$ — как будто параллельно включены $4r$ и R.

Смысл: пластинку с точечными контактами заменяет звезда, а симметрия цепи разрешает резать квадраты по диагоналям и сводит задачу к последовательным и параллельным соединениям.

Ответ. $X = \dfrac{4rR}{4r+R}$.