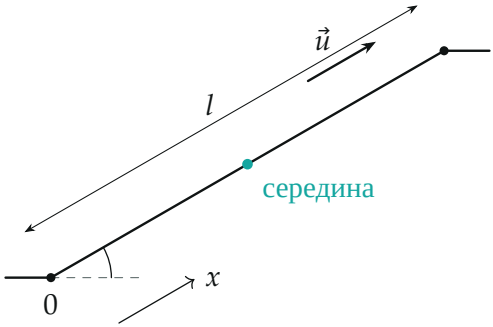
Бегущий по эскалатору

Задача 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 1] Человек начинает бежать по эскалатору, движущемуся вверх, с ускорением a. Добежав до середины эскалатора, человек мгновенно останавливается (относительно эскалатора), разворачивается и начинает бежать вниз с таким же по величине ускорением. В течение какого времени человек будет находиться на эскалаторе? Длина эскалатора l, скорость u.



Поясняющий рисунок: эскалатор длиной l движется вверх со скоростью u; ось x вдоль эскалатора от нижнего конца

▲ **Решение. Что происходит.** Удобнее всего описывать движение человека относительно земли. Ускорение a задано относительно эскалатора, но эскалатор движется равномерно, поэтому относительно земли ускорение то же; меняются только начальные скорости: по закону сложения скоростей к скорости относительно эскалатора добавляется u. Получаем два участка равноускоренного движения: вверх с ускорением $+a$ от нижнего конца до середины и вниз с ускорением $-a$ от середины до нижнего конца. Класс задачи: относительное движение + равноускоренное движение по участкам.

Обозначения. Ось x — вдоль эскалатора вверх, начало — у нижнего конца. t_1 — время бега вверх до середины, t_2 — время от разворота до схода с эскалатора. Человек стартует с нижнего конца, вначале неподвижен относительно эскалатора.

1. Бег вверх (закон сложения скоростей и равноускоренное движение). Относительно эскалатора начальная скорость равна нулю, относительно земли — u; ускорение $+a$. Координата

$$x(t) = ut + \frac{at^2}{2}.$$

Середины человек достигает при $x(t_1) = \frac{l}{2}$:

$$\frac{at_1^2}{2} + ut_1 - \frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + al}}{a}$$

(второй корень отрицателен — он не подходит).

2. Бег вниз (то же для второго участка). После остановки относительно эскалатора скорость человека относительно земли снова u (вверх), ускорение теперь $-a$. Время отсчитываем от разворота:

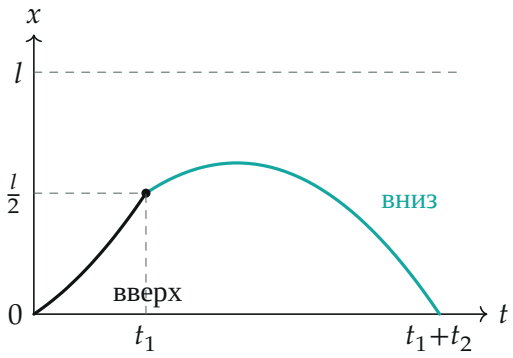
$$x(t) = \frac{l}{2} + ut - \frac{at^2}{2}.$$

Сначала эскалатор ещё уносит человека вверх, он останавливается относительно земли и только потом едет вниз. Нижнего конца он достигает при $x(t_2) = 0$:

$$\frac{at_2^2}{2} - ut_2 - \frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + al}}{a}.$$

3. Полное время.

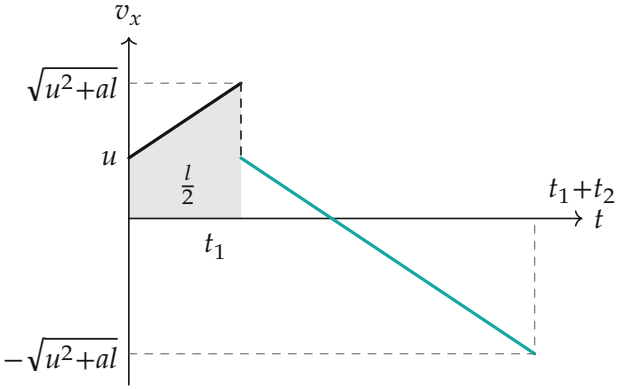
$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{u^2 + al}}{a}.$$



Координата человека относительно земли (построено при $u^2 = \frac{1}{4}al$): чёрный участок — бег вверх, бирюзовый — после разворота. Человек сначала ещё поднимается вместе с эскалатором, затем спускается

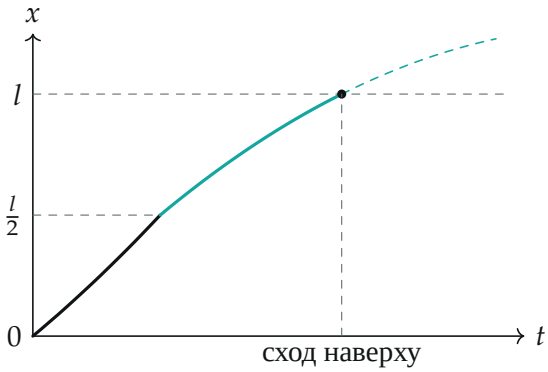
4. Второй способ — через скорость. Относительно земли ускорение на обоих участках постоянно по модулю, поэтому время равно изменению скорости, делённому на a. Скорость в конце бега вверх найдём из формулы $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$: $v_1^2 = u^2 + 2a\cdot\frac{l}{2}$, $v_1 = \sqrt{u^2 + al}$. На втором участке человек проходит $\Delta x = -\frac{l}{2}$ с ускорением $-a$: $v_2^2 = u^2 + 2(-a)(-\frac{l}{2})$, то есть он сходит с эскалатора со скоростью $\sqrt{u^2 + al}$, направленной вниз. Значит,

$$t_1 = \frac{\sqrt{u^2 + al} - u}{a}, \qquad t_2 = \frac{u - \left(-\sqrt{u^2 + al}\right)}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{u^2 + al}}{a}.$$



Проекция скорости человека на ось x относительно земли: наклон обоих отрезков равен $\pm a$; серая площадь — путь $\frac{l}{2}$ до середины. Скачок при t_1 — мгновенная остановка относительно эскалатора

Обратите внимание: ответ верен, только если после разворота эскалатор не успевает вынести человека к верхнему концу. Наибольшая высота подъёма после разворота — $x_{\max} = \dfrac{l}{2} + \dfrac{u^2}{2a}$; она не больше l при $u^2 \leq al$. Если же $u^2 > al$, человек сходит с эскалатора *наверху*: из $\frac{l}{2} + ut - \frac{at^2}{2} = l$ находим $t_2' = \dfrac{u - \sqrt{u^2 - al}}{a}$, и всё время на эскалаторе равно $\dfrac{\sqrt{u^2 + al} - \sqrt{u^2 - al}}{a}$.



Случай $u^2 > al$ (построено при $u^2 = \frac{25}{16}al$): после разворота человек не успевает остановиться относительно земли и сходит с эскалатора наверху; пунктир — продолжение параболы за пределами эскалатора

Проверка. Размерность: $\left[\sqrt{u^2 + al}/a\right] = \dfrac{\text{м/с}}{\text{м/с}^2} = \text{с}$. Предел $u = 0$ (эскалатор стоит): человек разгоняется до середины за $\sqrt{l/a}$ и за столько же возвращается, всего $2\sqrt{l/a}$ — формула даёт то же. Второй способ (через скорость, пункт 4) дал тот же ответ. Знак: $t_1 > 0$ при любых u, a, l, а $t_2 > t_1$ — вниз человек бежит дольше, потому что эскалатор движется ему навстречу.

Смысл: время на эскалаторе определяется только скоростью схода $\sqrt{u^2 + al}$: столько же человек «набирает» на двух участках с одинаковым по модулю ускорением.

Ответ. $\Delta t = \dfrac{2\sqrt{u^2 + al}}{a}$ (если $u^2 \leq al$; при $u^2 > al$ человек сходит наверху через $\dfrac{\sqrt{u^2 + al} - \sqrt{u^2 - al}}{a}$).