Процесс с постоянной теплоёмкостью и изохора

Задача 2. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 2] С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его теплоёмкость остаётся постоянной, а газ совершает работу A ($A > 0$). Затем с газом происходит изохорический процесс, в котором его температура возвращается к первоначальному значению, а газ получает количество теплоты $Q = 3A/2$. Определить молярную теплоёмкость газа в первом процессе.

▲ **Решение. Что происходит.** Газ проходит два процесса и возвращается к исходной температуре. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, поэтому её изменения в двух процессах равны по модулю и противоположны по знаку. Во втором процессе (изохора) работы нет, и вся полученная теплота Q идёт во внутреннюю энергию — отсюда находим изменение температуры в первом процессе. Затем первое начало термодинамики для первого процесса даёт его теплоту, а теплоёмкость по определению — это теплота на моль и на кельвин. Класс задачи: теплоёмкость процесса из первого начала.

Обозначения. ν — количество газа; состояние 1 — начальное (температура T_1), 2 — после первого процесса (T_2), 3 — после изохоры (снова T_1). C — молярная теплоёмкость первого процесса, $C_V = \dfrac{3}{2}R$ — молярная теплоёмкость одноатомного газа при постоянном объёме. Q_1 — теплота, полученная газом в процессе $1 \to 2$ (со знаком: отданная — отрицательна).

1. Изохора $2 \to 3$ (первое начало термодинамики). Объём не меняется, работа газа равна нулю — поэтому изохору и берём первой: в ней теплота сразу даёт изменение внутренней энергии:

$$Q = \Delta U_2 = \frac{3}{2}\nu R\,(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}A \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{A}{\nu R} > 0.$$

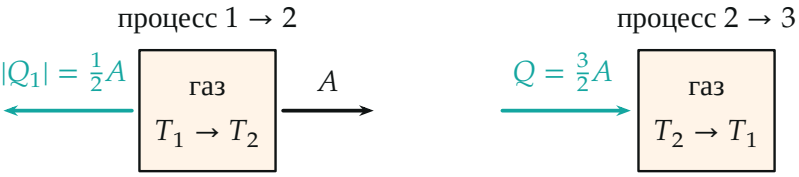
Газ получает тепло и нагревается от T_2 до T_1; значит, в первом процессе он *охладился*: $T_2 < T_1$.

2. Процесс $1 \to 2$ (первое начало термодинамики). Температура вернулась к исходной, поэтому $\Delta U_1 = -\Delta U_2 = -\frac{3}{2}A$. Газ совершил

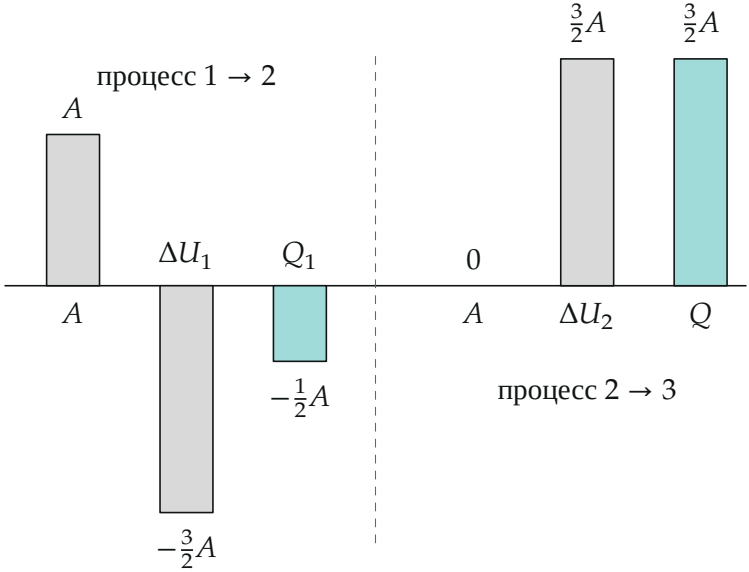
работу A, и полученная им теплота

$$Q_1 = \Delta U_1 + A = -\frac{3}{2}A + A = -\frac{1}{2}A < 0.$$

Знак минус: в первом процессе газ *отдаёт* теплоту $\frac{1}{2}A$. Внутренняя энергия убыла на $\frac{3}{2}A$: из неё оплачены и работа A, и отданная теплота $\frac{1}{2}A$.



Обмен энергией: в первом процессе газ совершает работу A и отдаёт *теплоту $\frac{1}{2}A$, во втором — получает теплоту $\frac{3}{2}A$*



Баланс энергии $Q = \Delta U + A$ для каждого процесса (столбцы в масштабе): слева процесс $1 \to 2$, справа изохора $2 \to 3$

3. Теплоёмкость (определение молярной теплоёмкости). Теплоёмкость процесса постоянна, поэтому $Q_1 = C\nu\,(T_2 - T_1)$:

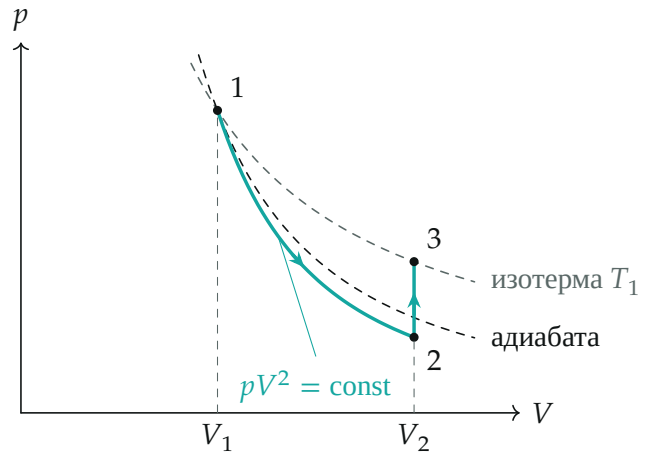
$$C = \frac{Q_1}{\nu\,(T_2 - T_1)} = \frac{-A/2}{-A/R} = \frac{R}{2} \approx 4{,}16 \text{ Дж/(моль·К)}.$$

То же в общем виде: $\nu(T_1 - T_2) = \dfrac{Q}{C_V}$, $Q_1 = A - Q$, откуда

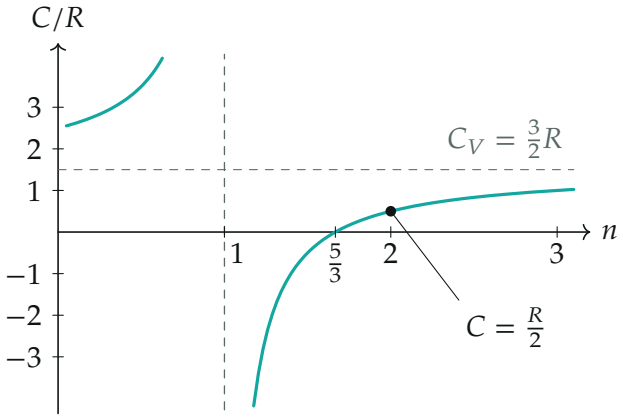
$$C = \frac{Q_1}{\nu(T_2 - T_1)} = C_V\,\frac{Q - A}{Q} = \frac{3}{2}R \cdot \frac{A/2}{3A/2} = \frac{R}{2}.$$

Теплоёмкость положительна: газ отдаёт тепло ($Q_1 < 0$) и охлаждается ($\Delta T < 0$) — знаки совпадают.

4. Какой это процесс на графике. Процесс с постоянной теплоёмкостью — политропа $pV^n = \text{const}$, её молярная теплоёмкость $C = C_V - \dfrac{R}{n-1}$. Из $\dfrac{R}{2} = \dfrac{3}{2}R - \dfrac{R}{n-1}$ находим $n = 2$: процесс $pV^2 = \text{const}$. Газ расширяется ($A > 0$) и охлаждается сильнее, чем при адиабатическом расширении ($n = 2 > \frac{5}{3}$): кривая на диаграмме идёт круче адиабаты, и поэтому газ должен отдавать тепло.



Процессы на диаграмме pV (построено при $V_2 = 2V_1$): $1 \to 2$ по политропе $pV^2 = \text{const}$ (бирюзой) круче адиабаты, затем изохора $2 \to 3$ до изотермы T_1



Молярная теплоёмкость политропы $C = C_V - \dfrac{R}{n-1}$*; точка — наш процесс* $(n = 2, C = \frac{R}{2})$

Обратите внимание: газ *охлаждается*, но теплоёмкость положительна — потому что он при этом и *отдаёт* тепло. Знак теплоёмкости определяется знаками теплоты и изменения температуры вместе, а знак теплоты — первым началом, а не тем, расширяется ли газ.

Проверка. Размерность: C выражена через R — Дж/(моль·К). Второй способ, через политропу: при $n = 2$ работа $A = \dfrac{\nu R(T_1 - T_2)}{n-1} = \nu R(T_1 - T_2)$, и теплота изохоры $Q = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}A$ — ровно как в условии. Предел: если бы $Q = A$, то $Q_1 = 0$ — адиабата, и формула $C = \frac{3}{2}R\,\frac{Q-A}{Q}$ даёт $C = 0$, как и должно быть.

Смысл: газ расширяется и охлаждается так сильно, что отдаёт тепло, — поэтому теплоёмкость его процесса положительна, но меньше C_V.

Ответ. $C = \dfrac{R}{2} \approx 4{,}16$ Дж/(моль·К).