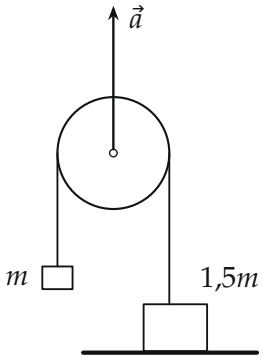
Блок, поднимаемый с ускорением

Задача 3. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 3] Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая верёвка, прикреплённая к двум телам массой m и $1{,}5m$ (см. рисунок). Тело массой m висит, тело массой $1{,}5m$ лежит на горизонтальной опоре. С каким ускорением надо поднимать блок, чтобы второе тело оторвалось от опоры?



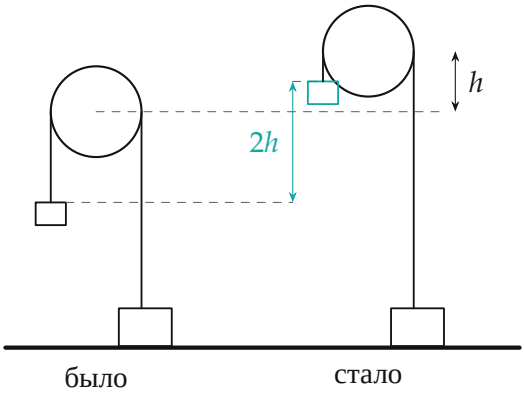
▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока второе тело лежит на опоре, оно неподвижно, и верёвка «привязана» к опоре: если блок поднимается, тело m поднимается вдвое быстрее. Тело m разгоняется вверх, значит, натяжение верёвки больше mg, и чем больше ускорение блока, тем сильнее натянута верёвка. Тело $1{,}5m$ оторвётся, когда натяжение сравняется с его весом $1{,}5mg$ (сила реакции опоры обратится в нуль). Класс задачи: блоки — кинематическая связь, затем второй закон Ньютона, условие отрыва $N = 0$.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх. a — ускорение блока, a_1 — ускорение тела m (относительно земли), T — натяжение верёвки (одно по всей длине: верёвка невесома, блок невесом и без трения), N — сила реакции опоры, действующая на тело $1{,}5m$.

1. Кинематическая связь (нерастяжимость верёвки). Пусть блок поднялся на h, а тело $1{,}5m$ стоит на месте. Правый кусок верёвки (от блока до тела $1{,}5m$) удлинился на h; длина верёвки постоянна, поэтому левый кусок укоротился на h. Тело m поднялось вместе с блоком на h и

ещё на h за счёт укорочения своего куска — всего на $2h$. Перемещения в любой момент относятся как $1:2$, значит, так же относятся скорости и ускорения:

$$a_1 = 2a.$$



Блок поднялся на h, тело $1{,}5m$ на месте: правый кусок верёвки длиннее на h, левый короче на h, и тело m поднимается на $2h$

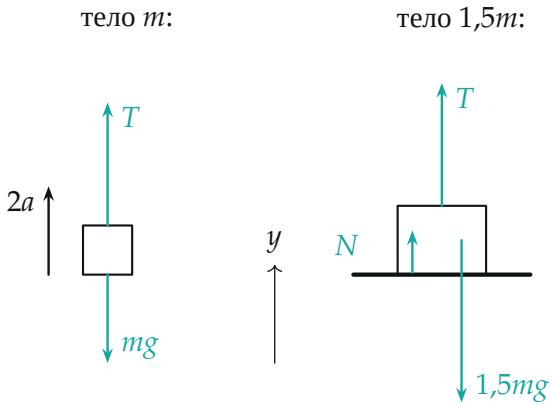
2. Тело m (второй закон Ньютона в проекции на ось y). На тело действуют сила натяжения T вверх и сила тяжести mg вниз:

$$T - mg = ma_1 = 2ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g + 2a).$$

Натяжение растёт с ускорением блока: чтобы разогнать тело вверх, верёвка должна тянуть сильнее его веса.

3. Тело $1{,}5m$ (условие равновесия, пока оно на опоре). Тело покоится: вверх — натяжение T и реакция опоры N, вниз — сила тяжести $1{,}5mg$:

$$T + N - 1{,}5mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 1{,}5mg - T = m\left(\frac{g}{2} - 2a\right).$$

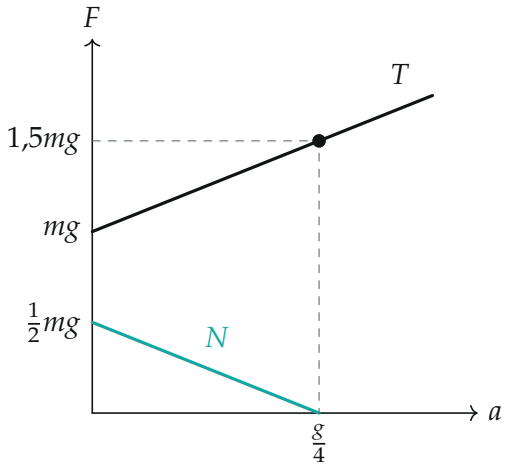


Силы на телах (длины стрелок — примерно по модулю при a чуть меньше $g/4$): тело m разгоняется вверх с ускорением $2a$, тело $1{,}5m$ покоится

4. Условие отрыва. Тело отрывается от опоры, когда опора перестаёт на него давить: $N = 0$, то есть $T = 1{,}5mg$:

$$m(g + 2a) = 1{,}5mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{4}.$$

При $a < \frac{g}{4}$ сила реакции $N > 0$ — тело лежит; при $a \geq \frac{g}{4}$ натяжения хватает, чтобы поднять тело $1{,}5m$.



Натяжение верёвки $T = m(g + 2a)$ и сила реакции опоры $N = m\left(\frac{g}{2} - 2a\right)$ в зависимости от ускорения блока: при $a = \frac{g}{4}$ натяжение достигает $1{,}5mg$, а N обращается в нуль

5. Второй способ — в системе отсчёта блока. В системе блока на каждое тело действует ещё сила инерции ma вниз — как будто ускорение свободного падения равно $g + a$. Пока тело $1{,}5m$ на опоре, в этой системе оно движется вниз с ускорением a, а тело m (верёвка нерастяжима) — вверх с ускорением a. Второй закон Ньютона для тела m: $T - m(g + a) = ma$, то есть $T = m(g + 2a)$ — то же, что в пункте 2.

Обратите внимание: ускорение тела m — не a, а $2a$. Если забыть о кинематической связи и считать, что тело m просто едет вместе с блоком, получится $T = m(g + a)$ и неверный ответ $a = \frac{g}{2}$.

Проверка. Размерность: $[g/4]$ — м/с^2, ускорение. Предел: если бы массы были равны (m и m), тело на опоре отрывалось бы уже при $a = 0$ — формула $m(g + 2a) = mg$ даёт $a = 0$, верно. Знак: $a = \frac{g}{4} > 0$ — блок нужно поднимать с ускорением, направленным вверх, как и ожидалось.

Смысл: подъём блока с ускорением a «прибавляет» к натяжению $2ma$, и недостающие $0{,}5mg$ набираются при $a = \frac{g}{4}$.

Ответ. $a \geq \frac{g}{4}$ (ускорение блока направлено вверх).