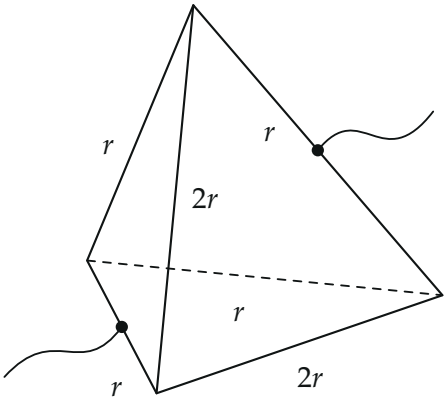
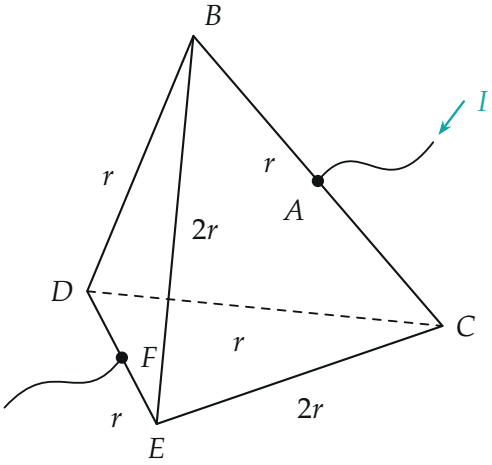
# Проволочная пирамида с разными рёбрами

**Задача 4.** [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Из проволоки сделали пирамиду, сопротивления всех рёбер которой показаны на рисунке. Пирамиду включили в электрическую цепь между серединами противоположных сторон (см. рисунок). Найти сопротивление пирамиды.




▲ **Решение. Что происходит.** Цепь не сводится к последовательным и параллельным соединениям, поэтому ищем распределение токов. Главная идея — симметрия: пирамида не меняется, если поменять местами две вершины на ребре, куда входит ток (вместе с рёбрами, которые к ним подходят). Отсюда ток во входном узле делится пополам, и в двух симметричных половинах токи одинаковы. Неизвестных остаётся два, их дают закон сохранения заряда в узле и равенство напряжений по двум путям. Класс задачи: сопротивление симметричной цепи.

**Обозначения.** Вершины пирамиды: $B$ и $C$ — концы ребра, к середине $A$ которого подводится ток $I$; $D$ и $E$ — концы противоположного ребра, ток выходит из его середины $F$. Сопротивления: $AB = AC = \frac{r}{2}$ (половины ребра $r$), $BD = CD = r$, $BE = CE = 2r$, $DF = EF = \frac{r}{2}$. $I_1$ — ток по ребру $BD$, $I_2$ — по ребру $BE$. $U$ — напряжение между $A$ и $F$.



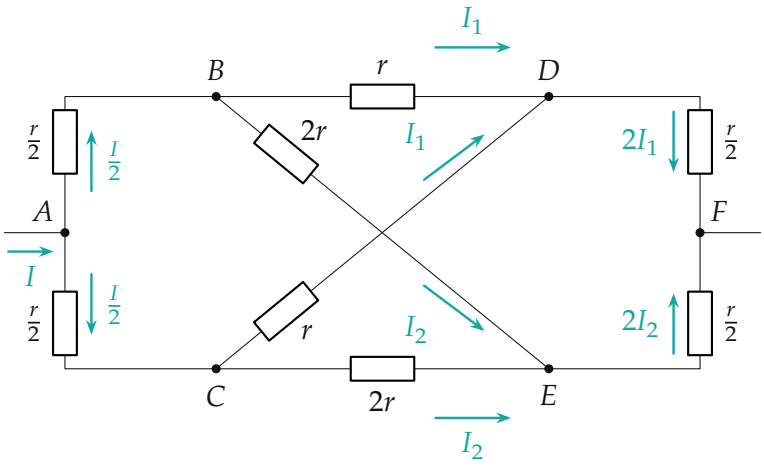

*Обозначения вершин: ток $I$ входит в середину $A$ ребра $BC$ и выходит из середины $F$ ребра $DE$*

**1. Симметрия.** Поменяем местами вершины $B$ и $C$. Рёбра $BD$ и $CD$ (оба $r$) переходят друг в друга, $BE$ и $CE$ (оба $2r$) — тоже, половины $AB$ и $AC$ — тоже; точки $A$ и $F$ остаются на месте. Цепь и точки подключения не изменились, значит, не изменились и токи: ток по $AB$ равен току по $AC$, по $CD$ — току по $BD$, по $CE$ — току по $BE$. Поэтому ток $I$ в узле $A$ делится пополам, по $\frac{I}{2}$.

**2. Токи (закон сохранения заряда в узлах).** В узле $B$ входит $\frac{I}{2}$, выходит $I_1 + I_2$:

$$I_1 + I_2 = \frac{I}{2}.$$

В узел $D$ приходят токи $I_1$ (от $B$) и $I_1$ (от $C$), и по $DF$ течёт $2I_1$; так же по $EF$ течёт $2I_2$.




*Та же пирамида, развёрнутая на плоскость: сопротивления и токи. Диагональные провода B–E и C–D пересекаются без соединения*

**3. Равенство напряжений по двум путям (закон Ома для участков).** Напряжение между $B$ и $F$ одно и то же, по какому бы пути его ни считать. Путь $B \to D \to F$ и путь $B \to E \to F$:

$$I_1 r + 2I_1 \cdot \frac{r}{2} = I_2 \cdot 2r + 2I_2 \cdot \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad 2I_1 = 3I_2.$$

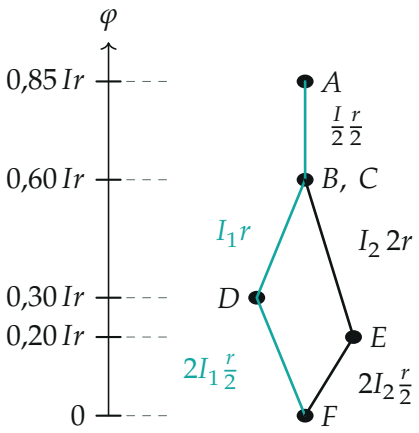
Вместе с $I_1 + I_2 = \frac{I}{2}$ получаем

$$I_1 = \frac{3}{10} I, \qquad I_2 = \frac{2}{10} I.$$

Больший ток идёт по пути с меньшим сопротивлением ($BD = r$), как и должно быть.

**4. Напряжение и сопротивление.** Идём от $A$ к $F$ по пути $A \to B \to D \to F$:

$$U = \frac{I}{2} \cdot \frac{r}{2} + I_1 r + 2I_1 \cdot \frac{r}{2} = \frac{Ir}{4} + \frac{3Ir}{10} + \frac{3Ir}{10} = \frac{17}{20} Ir, \qquad R_{\text{об}} = \frac{U}{I} = \frac{17}{20} r.$$




*Потенциалы узлов (за нуль — потенциал F): от B до F два пути — бирюзовый через D и чёрный через E — приходят к одному и тому же потенциалу*

Обратите внимание: точки $D$ и $E$ *не* равнопотенциальны ($\varphi_D = 0{,}30\,Ir$, $\varphi_E = 0{,}20\,Ir$): симметрия меняет местами $B$ и $C$, но не $D$ и $E$, у которых разные рёбра. Поэтому ребро $DE$ нельзя выбросить, а токи по его половинам разные: $2I_1 \neq 2I_2$.

**Проверка.** Размерность: $R_{\text{об}}$ выражено через $r$ — Ом. Второй путь от $A$ к $F$, через $E$: $U = \frac{Ir}{4} + I_2 \cdot 2r + 2I_2 \cdot \frac{r}{2} = \frac{Ir}{4} + \frac{4Ir}{10} + \frac{2Ir}{10} = \frac{17}{20}Ir$ — то же. Узел $F$: приходят $2I_1 + 2I_2 = I$ — весь ток. Предел: если бы все рёбра были $r$, то $I_1 = I_2 = \frac{I}{4}$ и $U = \frac{Ir}{4} + \frac{Ir}{4} + \frac{Ir}{4}$, $R_{\text{об}} = \frac{3}{4}r$; у нас два ребра вдвое больше, и сопротивление выросло до $0{,}85\,r$ — как и должно быть.

Смысл: симметрия сводит пирамиду из шести рёбер к двум неизвестным токам, а ток делится между путями через $D$ и через $E$ как $3 : 2$ — обратно «сопротивлениям» путей $2r$ и $3r$ (напряжение на пути через $D$ равно $2I_1 r$, через $E$ — $3I_2 r$).

**Ответ.** $R_{\text{об}} = \dfrac{17}{20}\,r = 0{,}85\,r.$