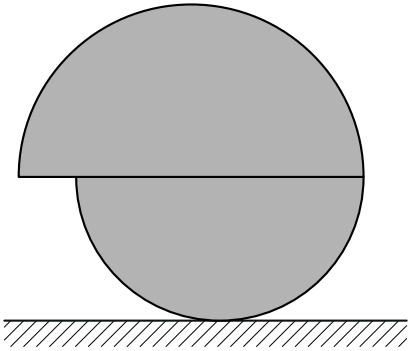
Равновесие двух склеенных полудисков

Задача 5. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 1, задача 5] Из листа фанеры вырезали два полудиска — радиуса r и $R = 1{,}2r$ — и склеили их по диаметру так, как показано на рисунке. Существует ли у такой системы положение равновесия с опорой на меньший диск? И если да, то чему равен угол между общим диаметром полудисков и поверхностью в положении равновесия? Как будет меняться этот угол в пределе $R \to r$? А в пределе $R \to \infty$? Будет ли это положение устойчивым? Объяснить полученные результаты.



Указание. Центр тяжести полудиска радиуса R находится на расстоянии $\dfrac{4R}{3\pi}$ от его центра.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Полудиски склеены так, что их правые края совпадают, а центры разнесены на $R - r$: большой полудиск свешивается влево. Нижний полудиск опирается на стол дугой окружности, поэтому точка опоры C всегда лежит точно под его центром O, как у катящегося колеса. Равновесие — когда суммарный момент сил тяжести относительно C равен нулю, то есть общий центр тяжести стоит над C. Класс задачи — равновесие тела на круглой опоре и его устойчивость через потенциальную энергию.

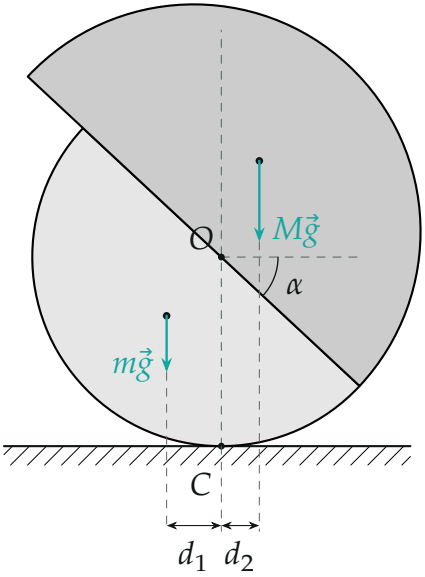
Обозначения. m и M — массы малого и большого полудисков; $\gamma = \dfrac{4}{3\pi}$, так что центры тяжести полудисков лежат на расстояниях γr и γR

от их центров; φ — угол поворота системы по часовой стрелке (правый край опускается), α — его значение в равновесии.

1. Массы. Лист фанеры однородный и одной толщины, поэтому масса пропорциональна площади:

$$\frac{M}{m} = \frac{\pi R^2/2}{\pi r^2/2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

2. В какую сторону наклонять. В положении рисунка условия центр тяжести малого полудиска стоит над C (плечо ноль), а центр тяжести большого смещён влево на $R - r$: система опрокидывается влево. При повороте влево центр тяжести малого полудиска уходит вправо, но большого — ещё дальше влево, и моменты не уравновешиваются. При повороте вправо центр тяжести большого полудиска приближается к вертикали через C, а центр малого уходит влево от неё — здесь равновесие возможно.



Положение равновесия при $R = 1{,}2r$ (углы и точки вычислены): $\alpha \approx 43°$, O — центр малого полудиска, C — точка опоры. Моменты mgd_1 и Mgd_2 относительно C равны

3. Плечи сил тяжести. Введём оси, связанные с телом: x' — вдоль общего диаметра вправо, y' — перпендикулярно ему, в сторону большого полудиска; начало — в O. Центр тяжести малого полудиска имеет координаты $(0;\ -\gamma r)$, большого — $(-(R-r);\ \gamma R)$: его центр сдвинут от O влево на $R-r$. При повороте тела по часовой стрелке на угол φ горизонтальная координата точки $(x';y')$ относительно вертикали через O и C равна $x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$. Отсюда горизонтальные смещения центров тяжести от вертикали через C:

$$x_m = -\gamma r\sin\varphi, \qquad x_M = -(R-r)\cos\varphi + \gamma R\sin\varphi.$$

Малый полудиск уходит влево ($x_m < 0$), большой при достаточном наклоне — вправо.

4. Условие равновесия. Правило моментов относительно точки опоры C: момент реакции стола и силы трения равен нулю (они приложены в C), остаются силы тяжести. Сумма моментов равна нулю, когда $mx_m + Mx_M = 0$:

$$m\gamma r\sin\alpha = M(\gamma R\sin\alpha - (R-r)\cos\alpha).$$

Делим на $\cos\alpha$ и подставляем $M/m = R^2/r^2$:

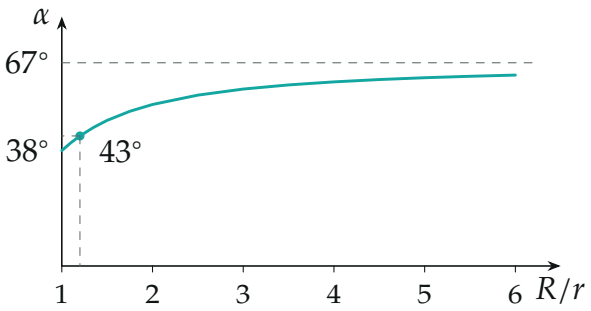
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M(R-r)}{\gamma(MR-mr)} = \frac{R^2(R-r)}{\gamma(R^3-r^3)} = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{R^2}{R^2+Rr+r^2}.$$

При $R = 1{,}2r$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1{,}44}{3{,}64} \approx 0{,}93, \qquad \alpha \approx 43^\circ.$$

Угол меньше 90°, поэтому опора по-прежнему приходится на дугу малого полудиска: такое положение существует.

5. Пределы. При $R \to r$: $\operatorname{tg}\alpha \to \dfrac{3\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, $\alpha \to 38^\circ$. При $R \to \infty$: $\operatorname{tg}\alpha \to \dfrac{3\pi}{4} \approx 2{,}36$, $\alpha \to 67^\circ$.



Угол равновесия в зависимости от R/r (по формуле пункта 4): от 38° при $R \to r$ до 67° при $R \to \infty$; точка — $R = 1{,}2r$

Смысл пределов. При $R \to \infty$ малый полудиск становится пренебрежимо лёгким, и равновесие — это когда над точкой C стоит центр тяжести одного большого полудиска: $\gamma R \sin\alpha = (R - r)\cos\alpha \approx R\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = 1/\gamma = 3\pi/4$. При $R = r$ полудиски складываются в целый однородный диск, его центр тяжести совпадает с O, и он находится в безразличном равновесии при любом угле. При R, сколь угодно мало отличающемся от r, моменты обеих сил малы, но их отношение конечно, поэтому положение равновесия остаётся одно и стремится к $\operatorname{tg}\alpha = \pi/4$.

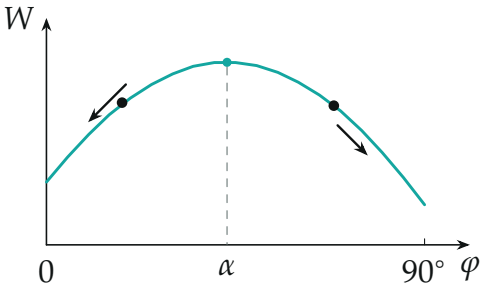
6. Устойчивость. Сравним потенциальную энергию вблизи равновесия. Высота точки $(x'; y')$ над центром O при повороте на φ равна $-x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$; высота O над столом постоянна (r). Потенциальная энергия системы, отсчитанная от уровня O:

$$W(\varphi) = g\Big[-m\gamma r\cos\varphi + M\big((R - r)\sin\varphi + \gamma R\cos\varphi\big)\Big].$$

Её производная $W'(\varphi) = g\big[m\gamma r\sin\varphi + M(R - r)\cos\varphi - M\gamma R\sin\varphi\big]$ обращается в ноль как раз при условии пункта 4 — это второй способ получить то же уравнение. Вторая производная в точке равновесия:

$$W''(\alpha) = -g\cos\alpha\Big[\gamma(MR - mr) + M(R - r)\operatorname{tg}\alpha\Big] < 0,$$

так как $MR > mr$. Значит, в положении равновесия потенциальная энергия максимальна: равновесие неустойчивое.



Потенциальная энергия от угла поворота при $R = 1{,}2r$ (вычислена по формуле пункта 6): равновесие — вершина горки, система скатывается с неё в любую сторону

Физический смысл: при наклоне чуть больше α центр тяжести большого полудиска уходит правее C, и система продолжает падать вправо; при наклоне чуть меньше — падает влево, как в положении рисунка условия. Так и должно быть: из положения рисунка система падает влево, значит, при повороте вправо её центр тяжести сначала поднимается, и найденная точка — вершина.

Обратите внимание: точка опоры при наклоне не остаётся на теле неподвижной — она всё время под центром O. Поэтому моменты считаем относительно точки стола C под O, а не относительно точки тела, которая касалась стола в начале.

Проверка. Размерность: $\operatorname{tg}\alpha$ — отношение длин, безразмерен. Предел $R \to \infty$ совпал с независимым рассуждением о центре тяжести одного большого полудиска. Численно: $m d_1 = 1 \cdot \gamma r \sin 43^\circ \approx 0{,}289r$, $M d_2 = 1{,}44\,(\gamma \cdot 1{,}2r \sin 43^\circ - 0{,}2r \cos 43^\circ) \approx 0{,}289r$ — моменты равны.

Ответ. Да, существует (при наклоне так, что большой полудиск поднимается): $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3\pi}{4} \cdot \dfrac{R^2}{R^2 + Rr + r^2} \approx 0{,}93$, $\alpha \approx 43^\circ$; при $R \to r$ $\operatorname{tg}\alpha \to \dfrac{\pi}{4}$ ($\alpha \to 38^\circ$), при $R \to \infty$ $\operatorname{tg}\alpha \to \dfrac{3\pi}{4}$ ($\alpha \to 67^\circ$); равновесие неустойчивое.