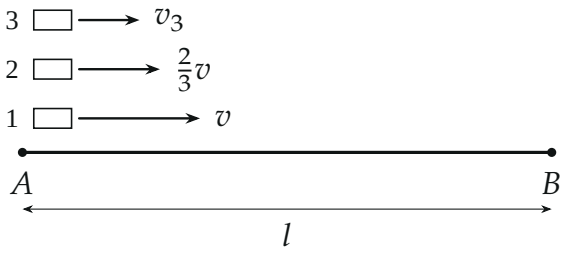
Три машины, опоздания прибытия

Задача 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 1] Три машины одновременно выехали из города A в город B и ехали с постоянными скоростями. Первая машина — со скоростью v, вторая — со скоростью $\frac{2}{3}v$. Известно, что вторая машина пришла в город B на время Δt позже первой машины, а третья — на такое же время позже второй. Найти скорость третьей машины.



Поясняющий рисунок: три машины стартуют из A одновременно и проходят один и тот же путь l с разными скоростями

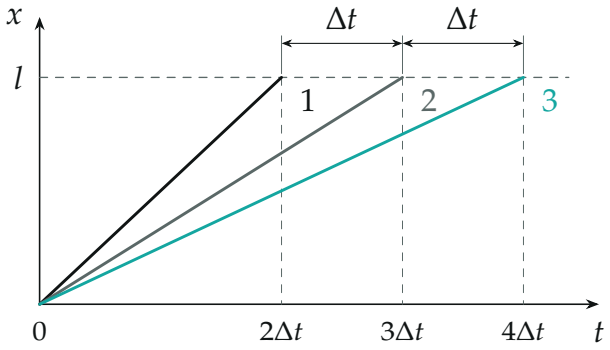
▲ **Решение. Что происходит.** Все три машины проходят один и тот же путь l, выехав одновременно. Путь общий, поэтому время в пути обратно пропорционально скорости. Разность времён первых двух машин известна — она даёт путь l через v и Δt; та же разность для второй и третьей машин даёт v_3. Класс задачи — равномерное движение, «разность времён в пути».

Обозначения. l — расстояние AB, v_3 — искомая скорость, τ_1, τ_2, τ_3 — времена в пути машин.

1. Путь через Δt. При равномерном движении время в пути равно пути, делённому на скорость: $\tau_1 = l/v$, $\tau_2 = \dfrac{l}{2v/3} = \dfrac{3l}{2v}$. Вторая машина пришла на Δt позже первой:

$$\Delta t = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3l}{2v} - \frac{l}{v} = \frac{l}{2v} \quad \Rightarrow \quad l = 2v\,\Delta t.$$

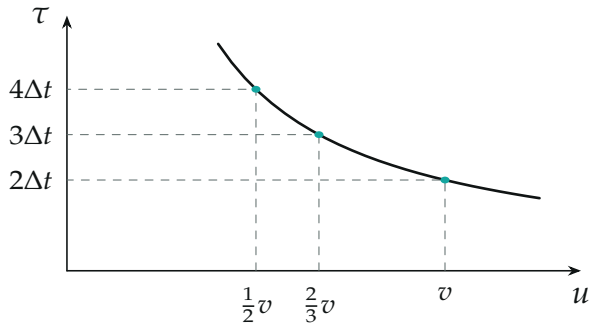
Отсюда времена в пути: $\tau_1 = 2\Delta t$, $\tau_2 = 3\Delta t$, а третья машина пришла ещё на Δt позже второй: $\tau_3 = 4\Delta t$.



Графики координаты от времени: общий старт, наклон прямой — скорость машины; прибытия разнесены на Δt

2. Скорость третьей машины. Путь третьей машины тот же: $l = v_3\tau_3$. Подставим $l = 2v\Delta t$ и $\tau_3 = 4\Delta t$:

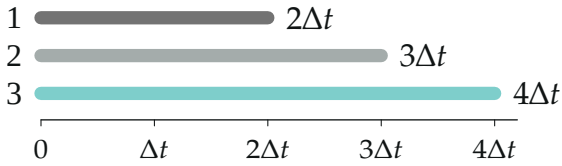
$$v_3 = \frac{l}{\tau_3} = \frac{2v\,\Delta t}{4\Delta t} = \frac{v}{2}.$$



Время в пути $\tau = l/u$ от скорости и при $l = 2v\Delta t$ (гипербола по вычисленным точкам); точки — три машины

Обратите внимание: равные промежутки между прибытиями не означают равных разностей скоростей. Время в пути растёт как $1/u$: скорости v, $\frac{2}{3}v$, $\frac{1}{2}v$ отличаются на $\frac{1}{3}v$ и $\frac{1}{6}v$, а времена — на одно и то же Δt.

$$v \cdot 2\Delta t = \frac{2}{3}v \cdot 3\Delta t = v_3 \cdot 4\Delta t = l$$



Время в пути каждой машины (полосы): произведение скорости на время — путь l — у всех трёх одно и то же

Проверка. Размерность: v_3 выражена через скорость. Второй способ: при общем пути $\tau_2/\tau_1 = v/(2v/3) = 3/2$ и $\tau_2 - \tau_1 = \Delta t$, откуда $\tau_1 = 2\Delta t$, $\tau_3 = 4\Delta t$, $v_3 = v\,\tau_1/\tau_3 = v/2$. Знак: третья машина пришла последней — её скорость наименьшая, $v/2 < 2v/3 < v$.

Смысл: из двух машин с известными скоростями восстанавливается путь, а дальше скорость третьей — путь, делённый на её время в пути. Ответ не зависит от Δt.

Ответ. $v_3 = \dfrac{v}{2}$.