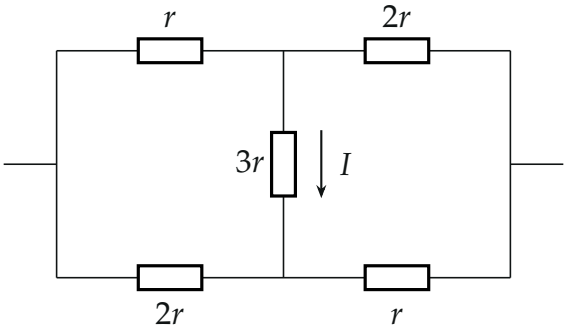
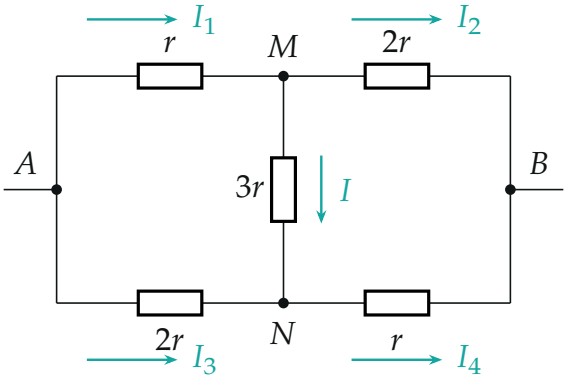
# Токи в цепи по току через центральный резистор

**Задача 3.** [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 3] К электрической цепи, схема которой приведена на рисунке, приложили некоторое напряжение. Известна сила тока $I$, текущего через центральное сопротивление. Найти силу тока через верхние сопротивления $r$ и $2r$. Значения всех сопротивлений приведены на схеме.




▲ **Решение. Что происходит.** Это мост из пяти резисторов: по центральному резистору $3r$ течёт ток $I$ сверху вниз, и он связывает токи плеч. Задачу решаем правилами Кирхгофа: закон сохранения заряда в узле и равенство напряжения на двух путях между одними и теми же узлами. Помогает симметрия схемы: при повороте на 180° она переходит в себя. Класс задачи — расчёт разветвлённой цепи через узлы и контуры.

**Обозначения.** Узлы: $A$ — левый, $B$ — правый, $M$ — верхний средний, $N$ — нижний средний. Токи: $I_1$ — через верхний $r$ от $A$ к $M$, $I_2$ — через верхний $2r$ от $M$ к $B$, $I_3$ — через нижний $2r$ от $A$ к $N$, $I_4$ — через нижний $r$ от $N$ к $B$. Если направление выбрано неверно, ток получится отрицательным.

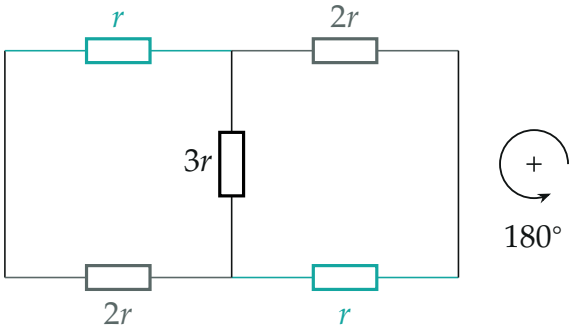



*Узлы и выбранные направления токов*

**1. Симметрия.** Повернём схему на 180° вокруг её центра: верхний $r$ встаёт на место нижнего $r$, верхний $2r$ — на место нижнего $2r$, центральный $3r$ — сам на себя, а узлы $A$ и $B$ меняются местами. Поменяем заодно полярность источника: ток в каждом резисторе сменит направление. Получится та же цепь с тем же напряжением, значит, токи в ней те же. Ток $I_1$ из $A$ в $M$ переходит при этом в ток из $N$ в $B$ через нижний $r$, а $I_2$ — в ток из $A$ в $N$ через нижний $2r$:

$$I_4 = I_1, \qquad I_3 = I_2.$$

Центральный ток $M \to N$ при повороте и смене полярности снова идёт $M \to N$ — противоречия нет.



*Поворот на 180° вокруг центра переводит схему в себя: верхний $r$ — в нижний $r$ (бирюзовые), верхний $2r$ — в нижний $2r$ (серые)*

**2. Узел $M$.** Закон сохранения заряда для узла $M$: сколько втекает, столько и вытекает. Втекает $I_1$, вытекают $I$ и $I_2$:

$$I_1 = I + I_2.$$

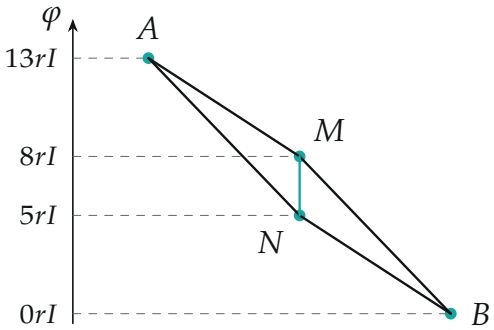
**3. Два пути из $M$ в $B$.** Напряжение между узлами $M$ и $B$ одно и то же, по какому пути его ни считать (закон Ома для каждого резистора, обход по направлениям токов). Прямо через верхний $2r$: $\varphi_M - \varphi_B = 2rI_2$. Через центральный резистор и нижний $r$: $\varphi_M - \varphi_B = 3rI + rI_4 = 3rI + rI_1$. Приравниваем:

$$2rI_2 = 3rI + rI_1.$$

**4. Решение системы.** Подставим $I_1 = I + I_2$ из пункта 2:

$$2I_2 = 3I + I + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 4I, \qquad I_1 = I + I_2 = 5I.$$

Оба тока положительны: направления выбраны верно, ток в верхнем $r$ идёт от $A$ к $M$, в верхнем $2r$ — от $M$ к $B$.




*Потенциалы узлов в единицах $rI$ (точка $B$ — ноль): падения напряжения на резисторах $r$ — по $5rI$, на $2r$ — по $8rI$, на центральном $3r$ — $3rI$*

Обратите внимание: ток через центральный резистор идёт «сверху вниз», хотя в верхнем ряду сначала стоит меньшее сопротивление. Узел $M$ отделён от $A$ малым сопротивлением $r$, а от $B$ — большим $2r$, поэтому его потенциал ближе к $\varphi_A$; у узла $N$ наоборот. Отсюда $\varphi_M > \varphi_N$.

**Проверка.** Размерность: токи выражены через ток. Второй способ — потенциалы узлов: положим $\varphi_B = 0$, $\varphi_M = 8rI$, $\varphi_N = 5rI$; тогда напряжение источника $\varphi_A = \varphi_M + rI_1 = 13rI$, и ток через нижний $2r$ равен $(13-5)rI/(2r) = 4I = I_2$, через нижний $r$ — $5rI/r = 5I = I_1$, в узле $N$: $4I + I = 5I$ — сходится. Полное сопротивление цепи $U/(I_1 + I_3) = 13rI/(9I) = \frac{13}{9}r$.

**Ответ.** Через верхний резистор $r$ — $I_1 = 5I$, через верхний резистор $2r$ — $I_2 = 4I$.