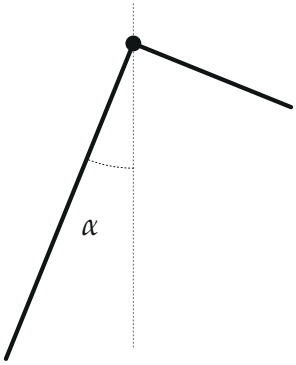
Согнутый стержень на оси

Задача 4. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 4] Однородный стержень длиной l сгибают под прямым углом в точке, делящей стержень в отношении 2:1. Стержень повешен на горизонтально расположенную ось (см. рисунок). Найти угол α между длинной стороной прямого угла и вертикалью.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Стержень висит на оси в точке сгиба и может только поворачиваться вокруг неё. В равновесии суммарный момент сил тяжести двух сторон относительно оси равен нулю: длинная сторона тянет стержень в одну сторону, короткая — в другую. Класс задачи — равновесие тела с осью, правило моментов; ответ можно получить и через центр тяжести, который в равновесии лежит на одной вертикали с осью.

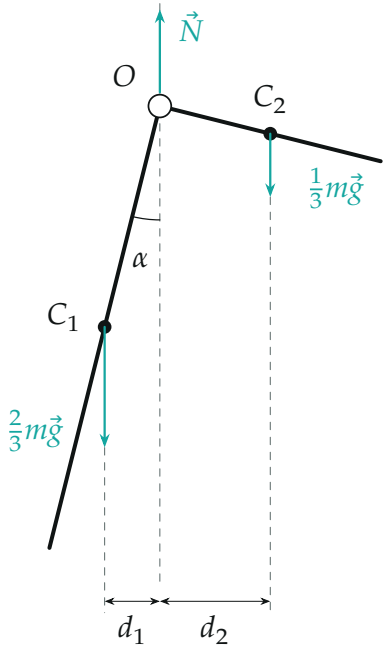
Обозначения. m — масса всего стержня, $a = l/3$. Длинная сторона: длина $2a$, масса $\frac{2}{3}m$; короткая: длина a, масса $\frac{1}{3}m$ (стержень однородный, масса пропорциональна длине). O — ось, C_1 и C_2 — середины длинной и короткой сторон (их центры тяжести).

1. Плечи сил тяжести. Длинная сторона отклонена от вертикали на угол α, короткая перпендикулярна ей, то есть отклонена от горизонтали на тот же угол α вниз. Центр тяжести длинной стороны отстоит от O на a вдоль неё, короткой — на $a/2$. Плечи сил тяжести относительно оси —

горизонтальные расстояния от O до вертикалей через C_1 и C_2:

$$d_1 = a\sin\alpha, \qquad d_2 = \frac{a}{2}\cos\alpha.$$

Центры тяжести лежат по разные стороны от вертикали через ось.



Силы на стержень в равновесии при вычисленном $\alpha \approx 14°$: реакция оси $\vec{N}$ и силы тяжести сторон в их серединах; d_1, d_2 — плечи

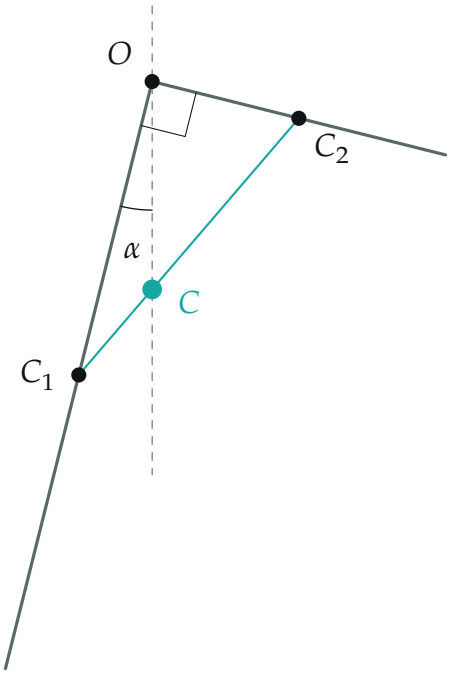
2. Правило моментов. Стержень покоится, поэтому сумма моментов всех сил относительно оси O равна нулю. Ось выбрана так, чтобы не понадобилась неизвестная реакция $\vec{N}$: её плечо равно нулю. Силы тяжести поворачивают стержень в противоположные стороны, и их моменты равны:

$$\frac{2}{3}mg\cdot a\sin\alpha = \frac{1}{3}mg\cdot\frac{a}{2}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}.$$

Отсюда $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} \approx 14°$.

3. Второй способ — центр тяжести. Центр тяжести C всего стержня лежит на отрезке C_1C_2 и делит его в отношении, обратном массам: $C_1C : CC_2 = 1 : 2$. В равновесии тело на оси висит так, что C находится на вертикали через O (иначе сила тяжести $m\vec{g}$ создала бы момент). В прямоугольном треугольнике OC_1C_2 катеты $OC_1 = a$ и $OC_2 = a/2$; угол между вертикалью OC и стороной OC_1 и есть α. Координаты точки C вдоль сторон (оси вдоль длинной и вдоль короткой стороны): $\frac{2}{3}a$ и $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{6}$, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a/6}{2a/3} = \frac{1}{4}.$$



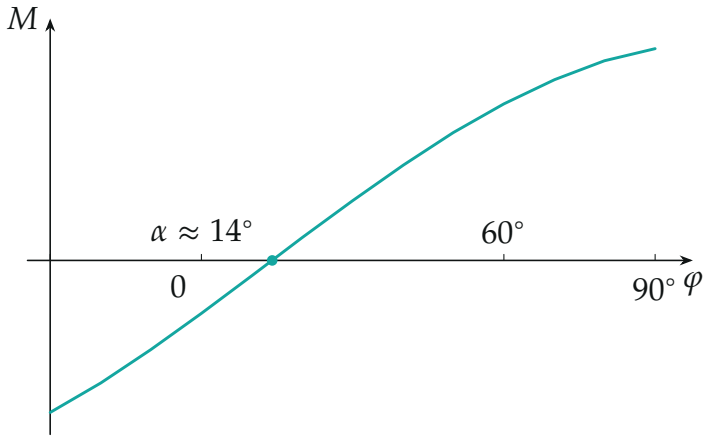
Центр тяжести C делит отрезок C_1C_2 в отношении $1 : 2$ и в равновесии лежит точно под осью O (построено по вычисленным координатам)

4. Устойчивость. Обозначим через φ угол длинной стороны с вертикалью при повороте стержня. Момент сил тяжести, возвращающий

длинную сторону к вертикали, по тем же плечам:

$$M(\varphi) = \frac{mga}{6}\,(4\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Он обращается в ноль при $\operatorname{tg}\varphi = 1/4$ и растёт с φ: при отклонении дальше от вертикали момент возвращает стержень назад, при отклонении к вертикали — отталкивает от неё. Равновесие устойчивое: центр тяжести C ниже оси.



Возвращающий момент $M(\varphi)$, вычисленный по формуле пункта 4: ноль при α, справа положителен, слева отрицателен — равновесие устойчивое

Обратите внимание: масса стороны пропорциональна её длине, поэтому длинная сторона «выигрывает» дважды — и массой, и плечом. Отсюда множитель 4, а не 2.

Проверка. Размерность: тангенс безразмерен. Предельный случай: если бы стороны были равны (длины b, массы $m/2$), то $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{b}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}mg\cdot\frac{b}{2}\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$ — симметрия, как и должно быть. Второй способ (пункт 3) дал тот же ответ.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} \approx 14°$ $(\sin\alpha = 1/\sqrt{17})$.