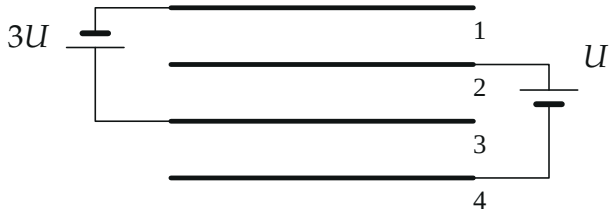
# Четыре пластины и два источника

**Задача 5.** [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 5] Четыре параллельные пластины находятся на равных расстояниях друг от друга. Пластины попарно подключают к источникам напряжения $U$ и $3U$, как это показано на рисунке. Найти разность потенциалов между пластинами 2 и 3 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3$. Краевыми эффектами пренебречь.




▲ **Решение. Что происходит.** Каждый источник соединяет две пластины и переносит заряд с одной на другую: заряд пары, подключённой к одному источнику, остаётся равным нулю. Заряды пластин создают однородные поля в промежутках, а напряжения источников задают сумму полей вдоль пути между их пластинами. Два неизвестных заряда — два уравнения напряжений. Класс задачи — система плоских пластин, суперпозиция полей бесконечных заряженных плоскостей.

**Обозначения.** $S$ — площадь пластин, $d$ — расстояние между соседними пластинами, $C_0 = \varepsilon_0 S/d$. Ось $y$ — вертикально вниз, от пластины 1 к пластине 4; $E_{12}$, $E_{23}$, $E_{34}$ — проекции напряжённости на неё в промежутках. Заряды пластин: $q_1$ и $-q_1$ у пластин 1 и 3 (источник $3U$), $q_2$ и $-q_2$ у пластин 2 и 4 (источник $U$).

**1. Полярность источников.** У источника длинная тонкая черта — плюс, короткая толстая — минус. Пластина 1 подключена к минусу источника $3U$, пластина 3 — к плюсу; пластина 2 — к плюсу источника $U$, пластина 4 — к минусу:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -3U, \qquad \varphi_2 - \varphi_4 = U.$$

**2. Поле в промежутках.** Бесконечная плоскость с зарядом $Q$ создаёт по обе стороны поле $Q/(2\varepsilon_0 S)$, направленное от неё (при $Q > 0$). Прин-

цип суперпозиции: в промежутке складываются поля всех четырёх пластин; пластины выше точки дают вклад вниз, ниже — вверх. Так как полный заряд системы равен нулю, проекция поля в промежутке равна заряду всех пластин выше него, делённому на $\varepsilon_0 S$:

$$E_{12} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}, \qquad E_{23} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0 S}, \qquad E_{34} = \frac{q_1 + q_2 - q_1}{\varepsilon_0 S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}.$$

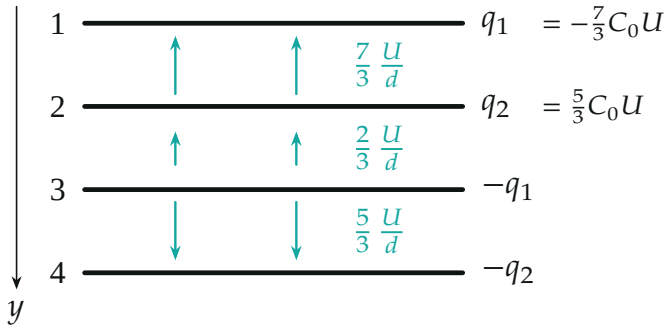
Снаружи пластин поле равно нулю.

**3. Напряжения источников.** Разность потенциалов между пластинами — сумма $E\,d$ по промежуткам между ними (поле однородно, путь вдоль оси $y$):

$$\varphi_1 - \varphi_3 = (E_{12} + E_{23})\,d = \frac{2q_1 + q_2}{C_0} = -3U,$$
$$\varphi_2 - \varphi_4 = (E_{23} + E_{34})\,d = \frac{q_1 + 2q_2}{C_0} = U.$$

Сложим уравнения: $3(q_1 + q_2) = -2C_0U$; вычтем: $q_1 - q_2 = -4C_0U$. Отсюда

$$q_1 = -\frac{7}{3}C_0U, \qquad q_2 = \frac{5}{3}C_0U.$$

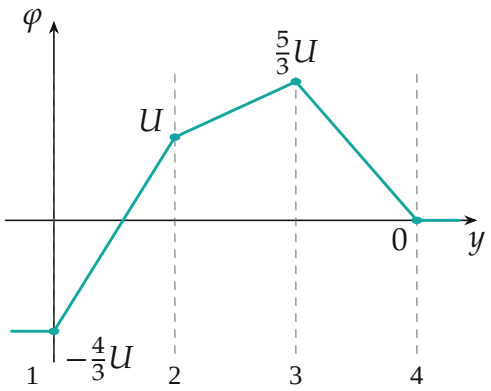



*Заряды пластин и поле в промежутках (стрелки — направление $\vec{E}$, длины по модулю): между 1–2 и 2–3 поле направлено вверх, между 3–4 — вниз*

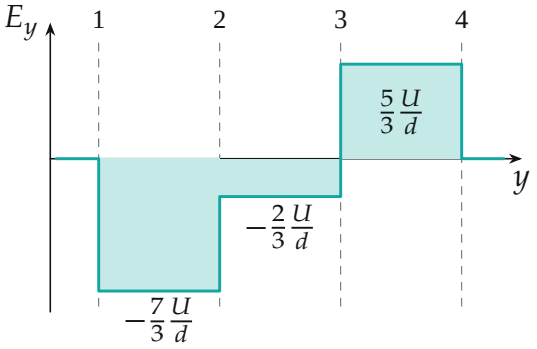
**4. Искомая разность потенциалов.**

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = E_{23}\,d = \frac{q_1 + q_2}{C_0} = -\frac{7}{3}U + \frac{5}{3}U = -\frac{2}{3}U.$$

Знак минус: между пластинами 2 и 3 поле направлено вверх, от пластины 3 к пластине 2, и потенциал пластины 3 выше.




*Потенциал вдоль оси y (пластина 4 — ноль): ломаная по найденным значениям; наклон участка — минус поле в промежутке*




*Проекция поля на ось y по промежуткам: площадь под графиком между пластинами — разность потенциалов (сумма $E_y d$ по промежуткам); снаружи поля нет*

Обратите внимание: поле в среднем промежутке создают заряды обеих пар, $E_{23} = (q_1 + q_2)/(\varepsilon_0 S)$. Если считать каждый источник отдельным конденсатором со своим полем, ответ не получится: пары пластин «вложены» друг в друга.

**Проверка.** Размерность: $\Delta\varphi$ выражена через $U$. Второй способ — через потенциалы: положим $\varphi_4 = 0$, тогда $\varphi_3 = E_{34}d = \frac{5}{3}U$, $\varphi_2 = \varphi_3 + E_{23}d = U$ — выполнено $\varphi_2 - \varphi_4 = U$; $\varphi_1 = \varphi_2 + E_{12}d = U - \frac{7}{3}U = -\frac{4}{3}U$, и $\varphi_1 - \varphi_3 = -3U$ — оба условия источников выполнены. Предел: если отключить источник $U$ ($q_2 = 0$), уравнение для пары 1–3 даёт $\varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{3}{2}U$ — половина напряжения $3U$ на одном из двух равных промежутков, как и должно быть.

**Ответ.** $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = -\dfrac{2U}{3}$.