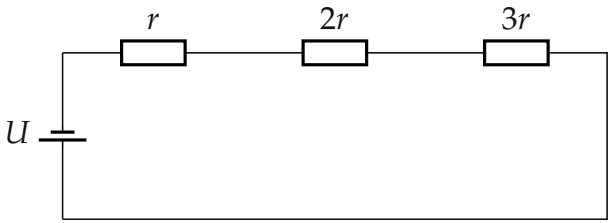
Мощность на резисторе при замене соседнего

Задача 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 1] Три резистора с сопротивлениями r, $2r$ и $3r$ соединили последовательно и подключили к источнику постоянного напряжения. В результате на резисторе с сопротивлением r выделяется мощность P. Какая мощность будет выделяться на этом резисторе, если резистор с сопротивлением $2r$ заменить резистором с сопротивлением $4r$? Остальные элементы цепи не изменяются.



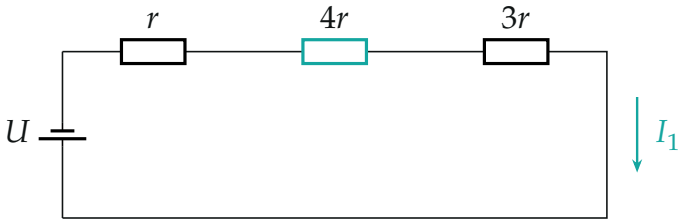
Поясняющий рисунок: последовательная цепь до замены, U — напряжение источника

▲ **Решение. Что происходит.** В последовательной цепи ток один для всех резисторов и задаётся полным сопротивлением. Замена $2r$ на $4r$ увеличивает полное сопротивление, ток падает, и мощность на резисторе r, пропорциональная квадрату тока, уменьшается. Напряжение источника неизвестно, но оно одно и то же до и после — уйдёт при делении. Класс задачи — последовательная цепь, закон Ома и закон Джоуля — Ленца.

Обозначения. U — напряжение источника (постоянное), I и I_1 — ток до и после замены, P_1 — искомая мощность.

1. Ток до и после. Закон Ома для всей цепи: ток равен напряжению, делённому на полное сопротивление; у последовательного соединения сопротивления складываются:

$$I = \frac{U}{r + 2r + 3r} = \frac{U}{6r}, \qquad I_1 = \frac{U}{r + 4r + 3r} = \frac{U}{8r}.$$



Цепь после замены: резистор $2r$ заменён на $4r$ (выделен), ток I_1 одинаков во всех резисторах

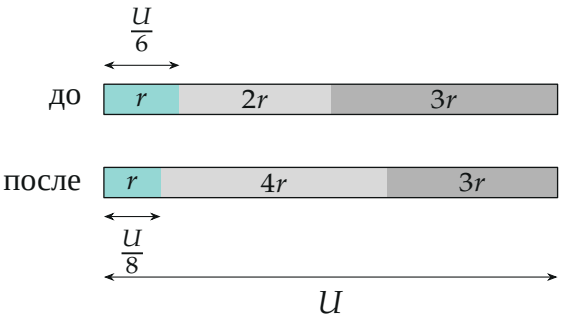
2. Мощность. Закон Джоуля — Ленца для резистора r: $P = I^2 r$. До замены и после:

$$P = \frac{U^2}{36r}, \qquad P_1 = \frac{U^2}{64r}.$$

Разделим второе на первое — неизвестное U сократится:

$$\frac{P_1}{P} = \left(\frac{I_1}{I}\right)^2 = \left(\frac{6r}{8r}\right)^2 = \frac{9}{16}, \qquad P_1 = \frac{9}{16}P.$$

Мощность уменьшилась: ток упал в $4/3$ раза, мощность — в $16/9$ раза.

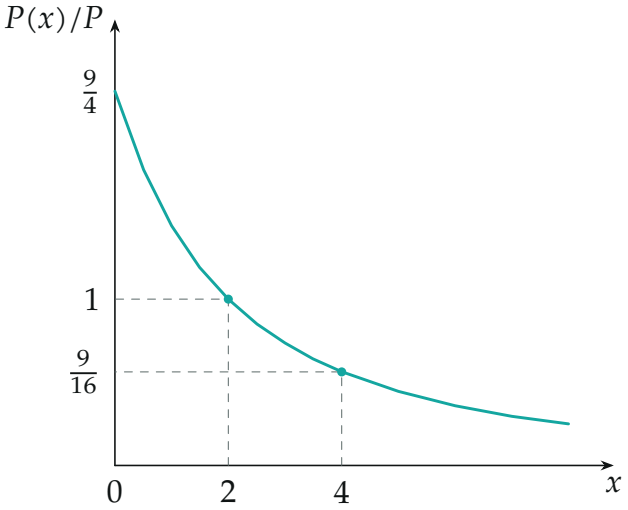


Как делится напряжение источника между резисторами (пропорционально сопротивлениям): на резисторе r было $U/6$, стало $U/8$

3. Как мощность зависит от заменённого резистора. Пусть вместо $2r$ стоит xr. Тогда ток $U/((4+x)r)$ и

$$\frac{P(x)}{P} = \left(\frac{6}{4+x}\right)^2.$$

При $x = 2$ отношение равно 1, при $x = 4$ оно равно $9/16$; при $x \to 0$ (перемычка) мощность выросла бы до $\frac{9}{4}P$, при $x \to \infty$ (обрыв) — упала бы до нуля.



Мощность на резисторе r в зависимости от сопротивления xr на месте среднего резистора (по формуле пункта 3); точки — $x = 2$ (было) и $x = 4$ (стало)

Обратите внимание: при замене меняется не только сопротивление среднего резистора, но и ток во всей цепи; мощность на резисторе r меняется именно через ток. Источник — «постоянного напряжения»: неизменно U, а не ток.

Проверка. Размерность: P_1 выражена через мощность. Второй способ — через напряжение на резисторе r: $P = U_r^2/r$, а U_r — доля $r/R_{\text{полн}}$ от U: $U/6 \to U/8$, отношение квадратов $(6/8)^2 = 9/16$. Знак: сопротивление выросло — мощность на r уменьшилась.

Ответ. $P_1 = \dfrac{9}{16}P$.