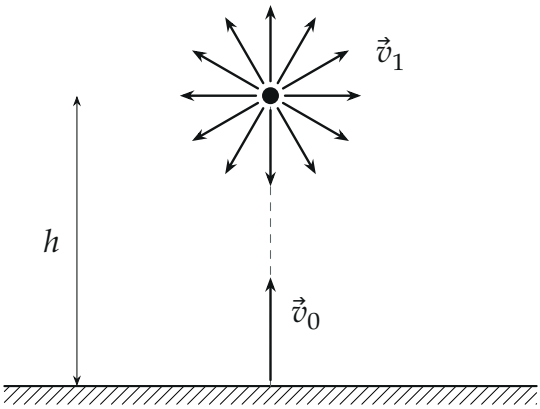
Граната, разорвавшаяся в верхней точке

Задача 2. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 2] Симметричная граната, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью v_0, в верхней точке траектории разорвалась на множество одинаковых осколков. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок, если осколки падали на землю в течение времени Δt?



Поясняющий рисунок: взрыв в верхней точке на высоте h, осколки разлетаются во все стороны с одинаковыми по модулю скоростями v_1

▲ **Решение. Что происходит.** В верхней точке скорость гранаты равна нулю. Граната симметричная, осколки одинаковые, поэтому все они получают скорости одного модуля v_1 во всех направлениях (суммарный импульс остаётся нулевым). Дальше каждый осколок летит с ускорением $\vec{g}$. Первым упадёт осколок, брошенный вертикально вниз, последним — брошенный вертикально вверх. Главная идея: «верхний» осколок возвращается в точку взрыва со скоростью v_1 вниз и дальше повторяет движение «нижнего» — значит, Δt — это просто время его подъёма и возврата. Класс задачи — кинематика свободного падения, разлёт осколков.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх, начало — на земле. h — высота взрыва, v_1 — скорость осколков сразу после взрыва, t_1 — искомое время падения первого осколка, t_2 — последнего; время отсчитываем от взрыва.

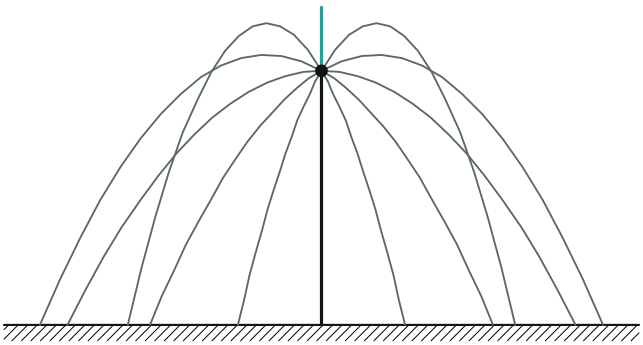
1. Высота взрыва. Для подъёма гранаты до остановки $v^2 - v_0^2 = -2gh$ при $v = 0$:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2. Кто падает первым и последним. Осколок, у которого проекция начальной скорости на ось y равна v_{1y}, падает через время t, где $h + v_{1y}t - \frac{gt^2}{2} = 0$:

$$t(v_{1y}) = \frac{v_{1y} + \sqrt{v_{1y}^2 + 2gh}}{g}.$$

Это возрастающая функция v_{1y}: её производная $\frac{1}{g}\left(1 + \frac{v_{1y}}{\sqrt{v_{1y}^2 + 2gh}}\right) > 0$, так как $|v_{1y}| < \sqrt{v_{1y}^2 + 2gh}$. Горизонтальная составляющая на время падения не влияет. Значит, первым падает осколок с $v_{1y} = -v_1$ (вниз), последним — с $v_{1y} = +v_1$ (вверх).

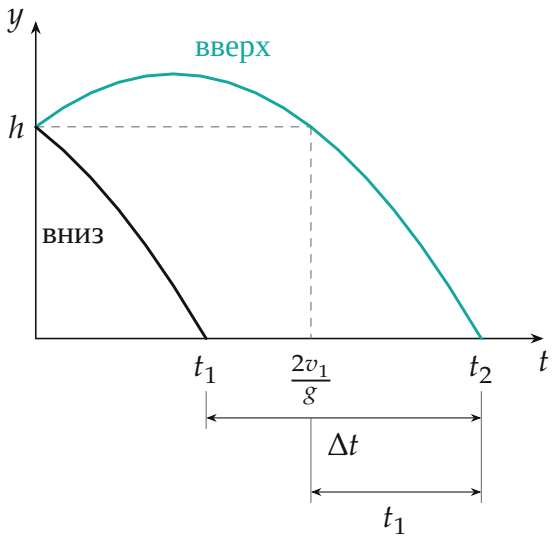


Траектории осколков при $v_0 = 20$ м/с, $v_1 = 10$ м/с, $g = 10$ м/с^2 (вычислены через каждые 30°): осколок «вниз» (чёрный) падает первым, «вверх» (бирюзовый) — последним

3. Время разлёта по моментам падения. Осколок, брошенный вверх, поднимается и возвращается в точку взрыва через время $2v_1/g$ (подъём до остановки v_1/g и столько же обратно), имея скорость v_1

вниз — ровно такую, как у осколка, брошенного вниз. Дальше он движется так же, как тот, только с опозданием на $2v_1/g$. Поэтому

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2v_1}{g} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{g\,\Delta t}{2}.$$



Высота от времени для осколков «вверх» и «вниз» (те же числа): после возврата на высоту h в момент $2v_1/g$ верхний осколок повторяет движение нижнего, поэтому $\Delta t = 2v_1/g$

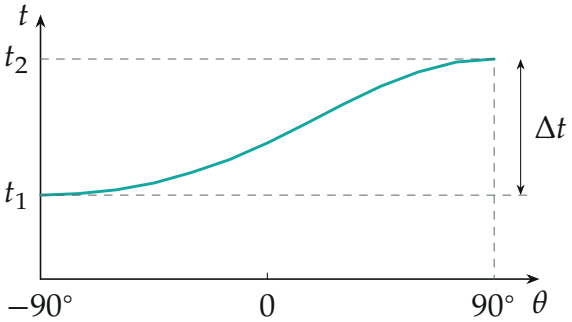
4. Время падения первого осколка. Уравнение движения осколка, брошенного вниз, в проекции на ось y: $y = h - v_1 t - \dfrac{gt^2}{2}$. Он падает при $y = 0$:

$$\frac{g}{2}t_1^2 + v_1 t_1 - h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}$$

(второй корень отрицательный — он не подходит). Подставим $2gh = v_0^2$

и $v_1 = g\Delta t/2$:

$$t_1 = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_0^2} - v_1}{g} = \sqrt{\frac{\Delta t^2}{4} + \frac{v_0^2}{g^2}} - \frac{\Delta t}{2}.$$



Время падения осколка от угла θ его скорости с горизонтом (те же числа, по формуле пункта 2): минимум при $\theta = -90°$, максимум при $\theta = 90°$, разность — Δt

Обратите внимание: Δt — это не время полёта какого-то одного осколка, а разность моментов падения первого и последнего. Её удобно найти без решения квадратных уравнений, «сшив» движение верхнего осколка с движением нижнего.

Проверка. Размерность: под корнем и снаружи — квадрат времени и время. Пределы: при $\Delta t \to 0$ (осколки почти без скорости) $t_1 \to v_0/g$ — время свободного падения с высоты $v_0^2/(2g)$, равное времени подъёма; при $\Delta t \gg v_0/g$ $t_1 \approx \dfrac{v_0^2}{g^2\Delta t} = \dfrac{h}{v_1}$ — быстрый осколок пролетает высоту h почти равномерно. Численно ($v_0 = 20$ м/с, $\Delta t = 2$ с, $g = 10$ м/с^2): $t_1 = \sqrt{1+4} - 1 \approx 1{,}24$ с, а $t_2 = t_1 + \Delta t \approx 3{,}24$ с совпадает с моментом падения осколка «вверх», найденным прямо из его уравнения движения.

Ответ. $t_1 = \sqrt{\dfrac{\Delta t^2}{4} + \dfrac{v_0^2}{g^2}} - \dfrac{\Delta t}{2}.$