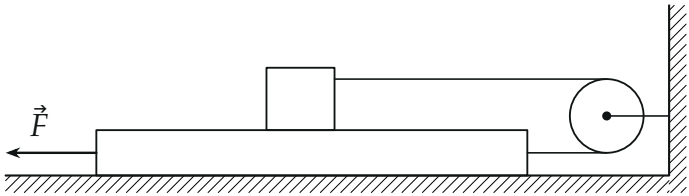
Тело на доске с нитью через блок

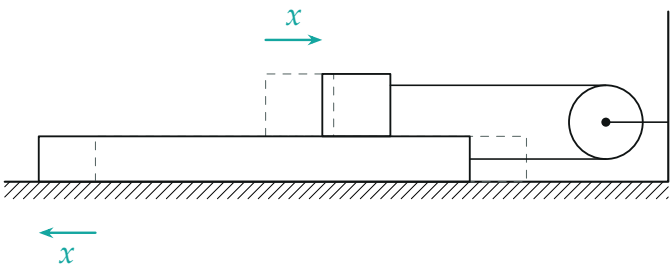
Задача 3. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 3] Тело массой m кладут на доску массой $4m$ и связывают с доской невесомой и нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (см. рисунок), прикреплённый к стене. Какую минимальную силу, направленную от стены, нужно приложить к доске, чтобы она начала двигаться? Коэффициент трения между всеми поверхностями равен k.



▲ **Решение. Что происходит.** Нить связывает тело и доску через неподвижный блок: если доска сдвинется от стены на x, тело сдвинется к стене на тот же x. Значит, доска не может поехать одна — одновременно тело начинает скользить по доске, а доска по полу. На пороге движения обе силы трения достигают максимальных значений, а ускорения ещё равны нулю. Класс задачи — связанные тела с трением, порог начала движения.

Обозначения. Ось x — горизонтально к стене. T — сила натяжения нити, $F_{тр1}$ — трение между телом и доской, $F_{тр2}$ — трение доски о пол, N_1 — сила нормальной реакции доски на тело, N_2 — пола на доску.

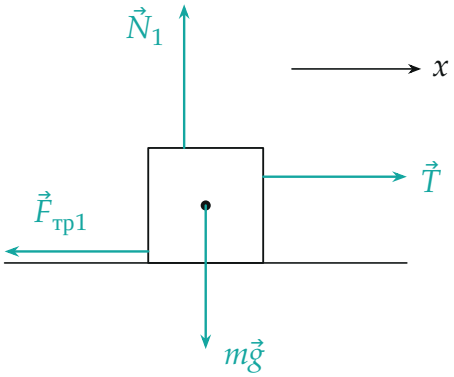
1. Кинематическая связь. Нить нерастяжима, блок неподвижен, поэтому сумма длин её горизонтальных участков постоянна. Доска сместилась от стены на x — нижний участок удлинился на x, верхний на столько же укоротился: тело сместилось к стене на x. Относительно доски тело сдвинулось на $2x$ к стене.



Доска сдвинулась от стены на x (пунктир — начальное положение), тело — к стене на x: относительно доски тело проскальзывает на $2x$

2. Тело m**.** На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}_1$, натяжение $\vec{T}$ (к блоку, то есть к стене) и трение со стороны доски. Тело начинает скользить относительно доски к стене, значит, трение направлено от стены и на пороге максимально: $F_{\text{тр1}} = kN_1$. Второй закон Ньютона в проекциях на вертикаль и на ось x при нулевом ускорении на пороге движения:

$$N_1 = mg, \qquad T - F_{\text{тр1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = kmg.$$

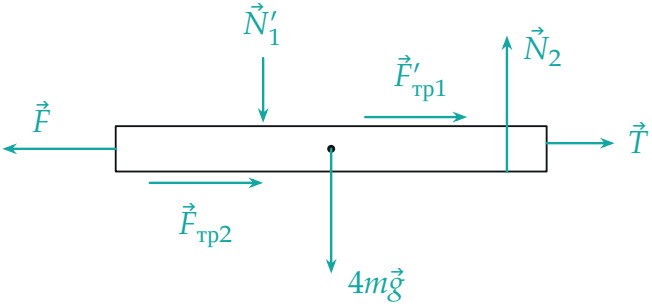


Тело m: натяжение тянет к стене, трение доски — от стены (тело проскальзывает к стене)

3. Доска $4m$**.** На доску действуют: внешняя сила $\vec{F}$ (от стены), натяжение $\vec{T}$ нижнего участка нити (к стене), сила трения со стороны тела

(по третьему закону Ньютона — к стене, по модулю $F_{тр1}$), трение пола (доска едет от стены — трение к стене, $F_{тр2} = kN_2$), сила тяжести $4m\vec{g}$, давление тела $N_1 = mg$ и реакция пола $\vec{N}_2$. Проекции второго закона Ньютона на вертикаль и на ось x на пороге движения:

$$N_2 = 4mg + N_1 = 5mg, \qquad T + F_{тр1} + F_{тр2} - F = 0.$$



Доска $4m$: сила $\vec{F}$ от стены, все остальные горизонтальные силы — к стене; $\vec{F}'_{mp1}$ и $\vec{N}'_1$ — силы со стороны тела

4. Минимальная сила. Подставим $T = kmg$, $F_{тр1} = kmg$, $F_{тр2} = k \cdot 5mg$:

$$F_{min} = T + F_{тр1} + F_{тр2} = kmg + kmg + 5kmg = 7kmg.$$

При меньшей силе трение покоя удерживает систему: обе силы трения меньше максимальных, и ни тело, ни доска не сдвигаются.

Обратите внимание: трение между телом и доской входит дважды — оно тормозит и доску, и (через натяжение нити) тело. А давление на пол создаёт не только доска, но и тело: $N_2 = 5mg$, а не $4mg$.

Проверка. Размерность: kmg — сила. Второй способ — энергетический: при медленном сдвиге доски на x работа силы F равна работе против сил трения, $Fx = F_{тр2}\,x + F_{тр1} \cdot 2x = 5kmg\,x + 2kmg\,x$, откуда $F = 7kmg$ — то же. Предел: без нити тело ехало бы вместе с доской, и хватило бы $5kmg$; нить добавляет $2kmg$.

Ответ. $F_{min} = 7kmg$.