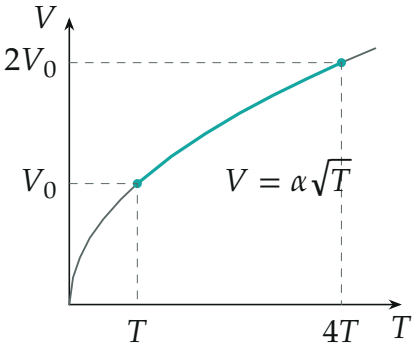
Теплота в процессе с объёмом, зависящим от температуры

Задача 4. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 4] С одним молем идеального одноатомного газа происходит процесс, в котором объём газа зависит от температуры по закону $V = \alpha\sqrt{T}$ (где α — некоторая постоянная). Какое количество теплоты нужно сообщить газу для двукратного увеличения его объёма? Начальная температура газа T.



Поясняющий рисунок: процесс на графике $V(T)$ (по точкам); бирюзовый участок — от V_0 до $2V_0$

▲ **Решение. Что происходит.** Газ расширяется и нагревается: объём растёт как $\sqrt{T}$, значит, при удвоении объёма температура растёт в 4 раза. Теплота идёт и на рост внутренней энергии, и на работу газа. Первое начало термодинамики требует работу, а для неё нужен график $p(V)$; из уравнения состояния он оказывается прямой через начало координат, и работа — площадь трапеции. Класс задачи — первое начало для процесса, заданного зависимостью параметров.

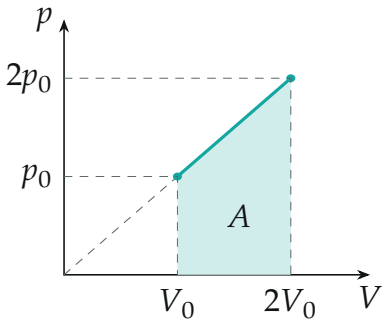
Обозначения. $\nu = 1$ моль; V_0, p_0 — начальные объём и давление, $p_0V_0 = RT$; конечное состояние — $2V_0$, $2p_0$, $4T$ (найдём ниже).

1. Конечная температура. Из закона процесса $T = V^2/\alpha^2$: объём вырос в 2 раза — температура в $2^2 = 4$ раза, $T_к = 4T$.

2. Процесс на графике $p(V)$. Уравнение Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ и $T = V^2/\alpha^2$:

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu R}{\alpha^2}\,V.$$

Давление пропорционально объёму: на графике $p(V)$ процесс — отрезок прямой, продолжение которой проходит через начало координат. Давление тоже растёт вдвое: $p_0 \to 2p_0$.



Процесс на графике $p(V)$ — прямая $p \propto V$; работа газа A — площадь закрашенной трапеции

3. Работа газа. Газ расширяется, его работа положительна и равна площади под графиком $p(V)$ — трапеции с основаниями p_0 и $2p_0$ и высотой V_0:

$$A = \frac{p_0 + 2p_0}{2}\,V_0 = \frac{3}{2}\,p_0V_0 = \frac{3}{2}\,RT.$$

4. Изменение внутренней энергии. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$; температура выросла от T до $4T$:

$$\Delta U = \frac{3}{2}R\,(4T - T) = \frac{9}{2}\,RT.$$

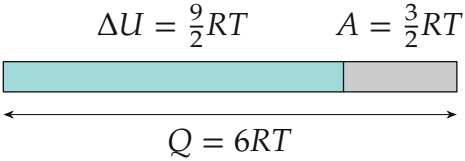
Внутренняя энергия увеличилась.

5. Теплота. Первое начало термодинамики для газа от начального до конечного состояния: подведённая теплота идёт на изменение внутрен-

ней энергии и работу газа:

$$Q = \Delta U + A = \frac{9}{2}RT + \frac{3}{2}RT = 6RT.$$

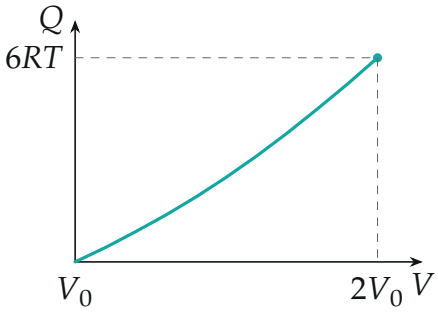
$Q > 0$ — газ в действительности получает теплоту.



Куда идёт теплота: три четверти — на нагрев газа, четверть — на работу

6. Второй способ — молярная теплоёмкость. Для малого участка процесса первое начало: $\delta Q = \frac{3}{2}R\,dT + p\,dV$. Из $pV = RT$ и $p = RV/\alpha^2$ получаем $p\,dV = \frac{R}{\alpha^2}V\,dV = \frac{1}{2}R\,d(V^2/\alpha^2) = \frac{1}{2}R\,dT$. Значит, теплоёмкость процесса постоянна:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R = 2R, \qquad Q = C\,(4T - T) = 6RT.$$



Подведённая теплота от текущего объёма: $Q(V) = 2RT\,(V^2/V_0^2 - 1)$ (по точкам); в конце — $6RT$

Обратите внимание: давление в процессе не постоянно, поэтому $A \neq p_0 \cdot V_0$; работа — площадь трапеции под наклонной прямой.

Проверка. Размерность: RT — энергия на моль, у нас 1 моль — джоули. Два способа (пункты 5 и 6) дали $6RT$. Сравнение: при изобарном удвоении объёма ($T \to 2T$) понадобилось бы $\frac{5}{2}R \cdot T = 2{,}5RT$ — меньше, потому что здесь газ ещё и нагревается вчетверо.

Ответ. $Q = 6RT$.