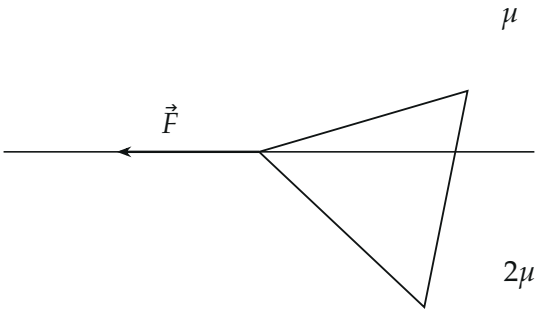
Треугольник на границе двух поверхностей

Задача 5. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 5] Вырезанный из листа фанеры равносторонний треугольник массой m тянут за одну из вершин по горизонтальной поверхности так, что эта вершина движется равномерно по границе двух полуповерхностей (см. рисунок, вид сверху). Коэффициент трения между треугольником и одной полуповерхностью μ, треугольником и второй полуповерхностью — 2μ. Какой горизонтальной силой, направленной вдоль границы полуповерхностей, нужно действовать для этого на треугольник?



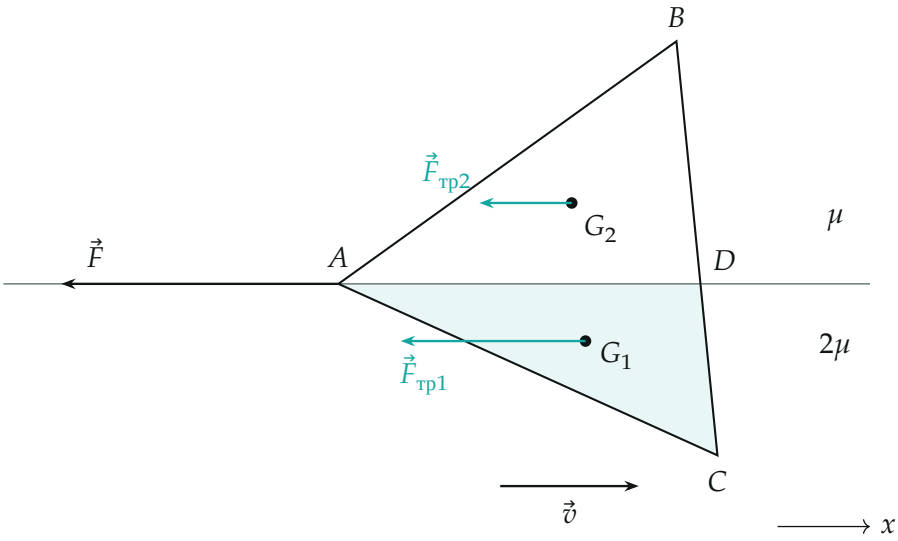
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие (статику) твёрдого тела, только тело не покоится, а движется поступательно с постоянной скоростью. Поэтому равны нулю и сумма сил, и сумма их моментов. Силы трения действуют на две части треугольника — над одной и над другой полуповерхностью; на часть над «шершавой» стороной (2μ) действует вдвое большая сила трения на единицу площади. Условие моментов относительно тянущей вершины определяет, *как* треугольник встанет (какая доля его площади окажется на каждой стороне), а условие сил даёт F.

Обозначения. A — вершина, за которую тянут; граница полуповерхностей проходит через A и пересекает противоположную сторону BC в точке D. Граница делит треугольник на два треугольника ADC (над полуповерхностью с 2μ) и ADB (над полуповерхностью с μ) с общим основанием AD; h_1 и h_2 — их высоты, опущенные на AD; m_1, m_2 —

их массы; $F_{тр1}$, $F_{тр2}$ — силы трения на них; ось x — вдоль границы по движению.

1. Куда направлены силы трения. Вершина A движется равномерно по прямой, и треугольник при этом не поворачивается (движение установившееся), значит, все его точки имеют одну и ту же скорость $\vec{v}$ вдоль границы. Сила трения скольжения на каждый кусочек треугольника направлена против его скорости — все силы трения параллельны границе и направлены против $\vec{v}$, то есть против оси x. Сила $\vec{F}$ по условию тоже вдоль границы.

Сила трения скольжения на кусочек площади равна коэффициенту трения, умноженному на вес кусочка (фанера однородна, давление на стол равномерное). Поэтому равнодействующая сил трения на часть i равна $\mu_i m_i g$ и приложена к её центру тяжести G_i: распределённые параллельные силы, пропорциональные массе, складываются так же, как силы тяжести.



Вид сверху. Граница AD делит треугольник на две части; силы трения на них приложены к их центрам тяжести G_1, G_2 и направлены против скорости

2. Второй закон Ньютона для треугольника в проекции на ось x. Ускорения нет, вертикальные силы (тяжести и реакции стола) на ось x

не проецируются:

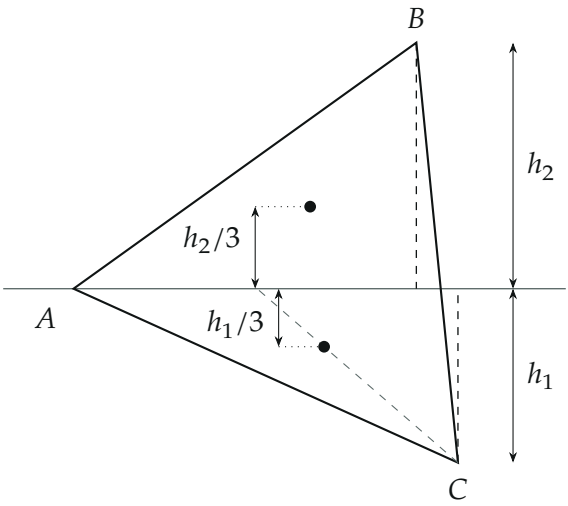
$$F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}} = 0, \qquad F = 2\mu m_1 g + \mu m_2 g.$$

Здесь пока неизвестно, как масса делится между частями, — это задаёт уравнение моментов.

3. Массы частей. У треугольников ADC и ADB общее основание AD, поэтому их площади, а значит и массы, относятся как высоты:

$$m_1 = \frac{m h_1}{h_1 + h_2}, \qquad m_2 = \frac{m h_2}{h_1 + h_2}.$$

4. Плечи сил трения. Центр тяжести треугольника лежит на медиане на $\frac{2}{3}$ от вершины, то есть на расстоянии $\frac{1}{3}$ высоты от основания. Значит, G_1 отстоит от границы AD на $h_1/3$, а G_2 — на $h_2/3$. Силы трения параллельны границе, поэтому их плечи относительно точки A — как раз эти расстояния.



Высоты частей h_1, h_2 и расстояния их центров тяжести от границы; штрих — медиана нижней части

5. Уравнение моментов относительно вертикальной оси через A. Тело не поворачивается, сумма моментов равна нулю. У силы $\vec{F}$ плечо

нулевое (она приложена в A), вертикальные силы момента относительно вертикальной оси не дают. Остаются силы трения, они стремятся повернуть треугольник в разные стороны:

$$F_{\text{тр1}}\,\frac{h_1}{3} = F_{\text{тр2}}\,\frac{h_2}{3},$$

$$2\mu\,\frac{mh_1}{h_1+h_2}\,g\,h_1 = \mu\,\frac{mh_2}{h_1+h_2}\,g\,h_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Над более шершавой полуповерхностью оказывается меньшая часть треугольника: большая сила на единицу площади уравновешивается меньшим плечом и меньшей площадью.

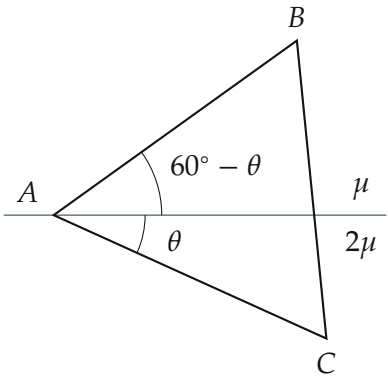
6. Сила. Подставляем массы в уравнение сил и делим на h_2:

$$F = \mu mg\,\frac{2h_1+h_2}{h_1+h_2} = \mu mg\,\frac{\sqrt{2}+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \sqrt{2}\,\mu mg.$$

7. Как встанет треугольник. Пусть θ — угол между границей и стороной AC; тогда сторона AB составляет с границей угол $60^\circ - \theta$, и $h_1 = a\sin\theta$, $h_2 = a\sin(60^\circ-\theta)$ (a — сторона). Условие $h_2 = \sqrt{2}\,h_1$ даёт

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{2}+\cos 60^\circ} \approx 0{,}45, \qquad \theta \approx 24^\circ.$$

Такое положение существует (угол между 0 и 60°), так что задача имеет решение; на рисунке к решению треугольник нарисован именно так.



Положение треугольника при равномерном движении: $\theta \approx 24°$

Обратите внимание.

- Без уравнения моментов задача не решается: одно уравнение сил содержит неизвестное деление массы между частями.
- На рисунке условия меньшая часть треугольника нарисована над полуповерхностью с μ; при равномерном движении она оказывается над полуповерхностью с 2μ. Рисунок условия — схема, ответ от этого не зависит.

Проверка. Размерность: $[\mu mg]$ — ньютоны. Обобщим: коэффициенты $k\mu$ и μ. Тогда моменты дают $kh_1^2 = h_2^2$, $h_2 = \sqrt{k}\,h_1$, и

$$F = \mu mg\,\frac{k+\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \sqrt{k}\,\mu mg.$$

При $k = 1$ (поверхность одна) $F = \mu mg$ — верно. При $k = 2$ получаем $\sqrt{2}\,\mu mg \approx 1{,}41\,\mu mg$ — между μmg и $2\mu mg$, как и должно быть. Ответ не зависит от размера треугольника.

Смысл: треугольник сам разворачивается так, что сила, нужная для его протаскивания, равна среднему геометрическому двух «чистых» сил трения μmg и $2\mu mg$.

Ответ. $F = \sqrt{2}\,\mu mg$.