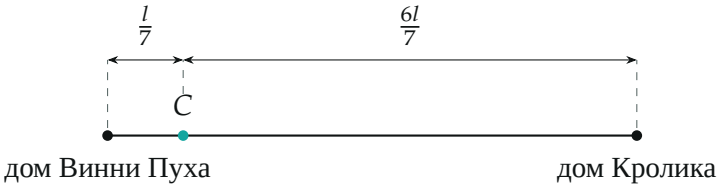
Винни Пух возвращается за банкой

Задача 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 7 класс, задача 1] Винни Пух и Пятачок пошли в гости к Кролику и шли с постоянной скоростью v. Когда они прошли одну седьмую часть пути, Винни Пух вспомнил, что забыл взять пустую банку для мёда, и решил вернуться за ней. С какой скоростью Винни Пух должен двигаться с этого момента, чтобы прийти к Кролику одновременно с Пятачком, который продолжал двигаться с той же скоростью?



Поясняющий рисунок: путь длины l, в точке C Винни Пух поворачивает назад

▲ **Решение. Что происходит.** От точки поворота C до встречи у Кролика оба героя движутся одно и то же время, но проходят разные пути: Пятачок — только остаток дороги, Винни Пух — путь назад, домой, и всю дорогу заново. Главная идея — приравнять времена движения. Класс задачи — равномерное движение «догнать к сроку».

Обозначения. l — длина пути от дома Винни Пуха до дома Кролика; C — точка, где Винни Пух вспомнил о банке; v_1 — искомая скорость Винни Пуха; τ — время от момента в точке C до прихода к Кролику. Время, чтобы взять банку, считаем малым (в условии о нём ничего не сказано).

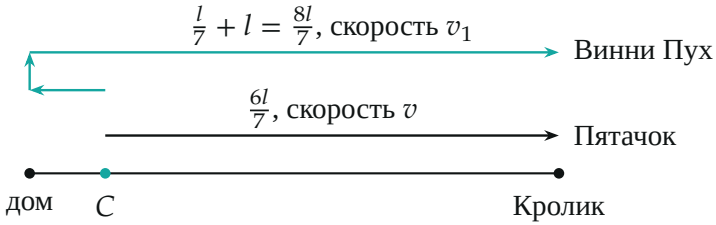
1. Путь Пятачка. Из точки C ему осталось пройти

$$s_{\text{П}} = l - \frac{l}{7} = \frac{6l}{7}.$$

2. Путь Винни Пуха. Из точки C он идёт назад к дому ($\frac{l}{7}$), а затем

весь путь до Кролика (l):

$$s_{\text{В}} = \frac{l}{7} + l = \frac{8l}{7}.$$

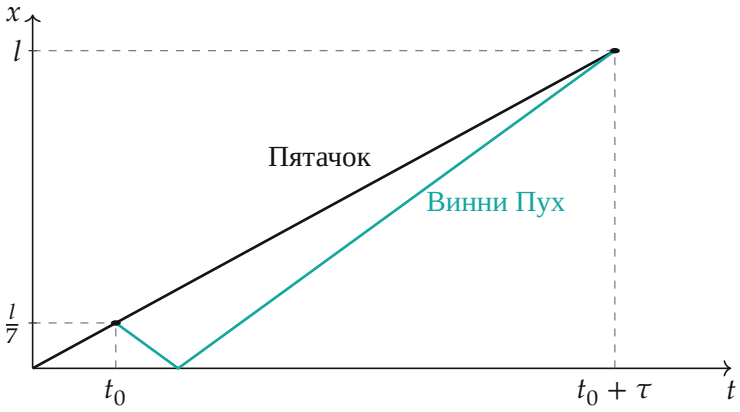


Пути героев от точки C до дома Кролика (путь Винни Пуха назад и вперёд разведён по высоте)

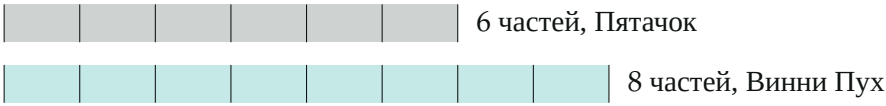
3. Одинаковое время. Оба движутся равномерно, поэтому время каждого — путь, делённый на скорость. Они выходят из C одновременно и приходят одновременно:

$$\tau = \frac{6l/7}{v} = \frac{8l/7}{v_1} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{8}{6}v = \frac{4}{3}v.$$

Длина пути l сократилась: ответ от неё не зависит.



Координата героев от времени (x — расстояние от дома): после поворота линия Винни Пуха круче — скорость больше



Пути в долях $\frac{l}{7}$: за одно и то же время Винни Пух проходит 8 частей вместо 6, значит, его скорость в $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ раза больше

Обратите внимание: возвращаясь домой, Винни Пух проходит отрезок $\frac{l}{7}$ дважды — назад и снова вперёд. Поэтому его путь $\frac{8l}{7}$, а не l.

Проверка. Размерность: v_1 — скорость. Предел: если бы Винни Пух вспомнил о банке сразу у дома (доля пути $\to 0$), пути сравнялись бы, и $v_1 \to v$. Второй способ: при доле пути k получаем $v_1 = v\dfrac{1+k}{1-k}$, при $k = \frac{1}{7}$ это $v \cdot \frac{8/7}{6/7} = \frac{4}{3}v$.

Смысл: за одно и то же время путь Винни Пуха больше в $\frac{4}{3}$ раза — во столько же раз должна быть больше скорость.

Ответ. $v_1 = \dfrac{4}{3}v$.