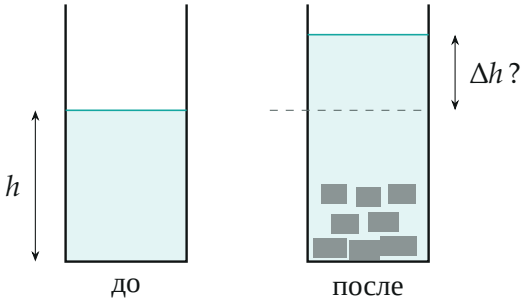
Железо в цилиндре с водой

Задача 2. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 7 класс, задача 2] В цилиндрический сосуд налита вода, уровень которой находится на высоте $h = 1$ м от дна сосуда. В сосуд бросили несколько кусочков железа так, что они полностью покрыты водой. В этом положении средняя плотность воды с железом оказалась равной $\rho_{ср} = 4$ г/см^3. Насколько поднялся уровень воды в сосуде? Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3, плотность железа $\rho_ж = 7{,}8$ г/см^3.



Поясняющий рисунок: уровень воды до и после того, как бросили кусочки железа

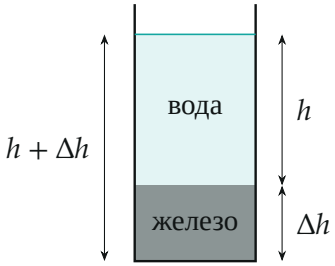
▲ **Решение. Что происходит.** Железо целиком под водой, поэтому уровень поднимается ровно на объём железа, делённый на площадь дна. Средняя плотность — полная масса содержимого, делённая на полный объём под новым уровнем. Запишем это определение и выразим массы через плотности: уравнение будет на одну неизвестную Δh. Класс задачи — средняя плотность смеси.

Обозначения. S — площадь дна; Δh — подъём уровня; $V_в = Sh$ — объём воды; $V_ж$ — объём всех кусочков железа; $m_в$, $m_ж$ — массы воды и железа.

1. Объём железа через подъём уровня. Вода в сосуде теперь занимает высоту $h + \Delta h$, но часть этого объёма — железо. Воды по-прежнему Sh, поэтому

$$S(h + \Delta h) = Sh + V_ж \quad \Rightarrow \quad V_ж = S\,\Delta h.$$

Удобно мысленно сплавить все кусочки в слой на дне: его толщина как раз Δh.



Мысленно сплавим железо в слой на дне: его толщина Δh, над ним вода высотой h

2. Средняя плотность. По определению — полная масса, делённая на полный объём:

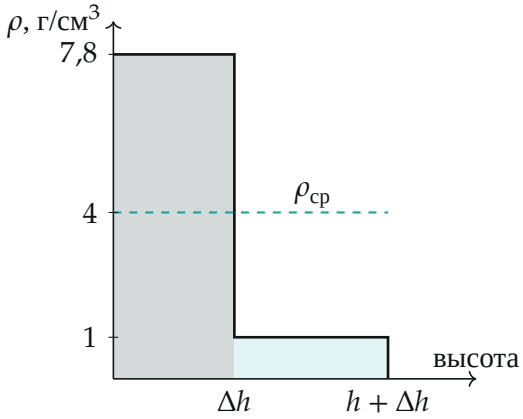
$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_{\text{в}} + m_{\text{ж}}}{S(h + \Delta h)}, \qquad m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} S h, \quad m_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} S\,\Delta h.$$

Площадь S сокращается:

$$\rho_{\text{ср}}(h + \Delta h) = \rho_{\text{в}} h + \rho_{\text{ж}} \Delta h.$$

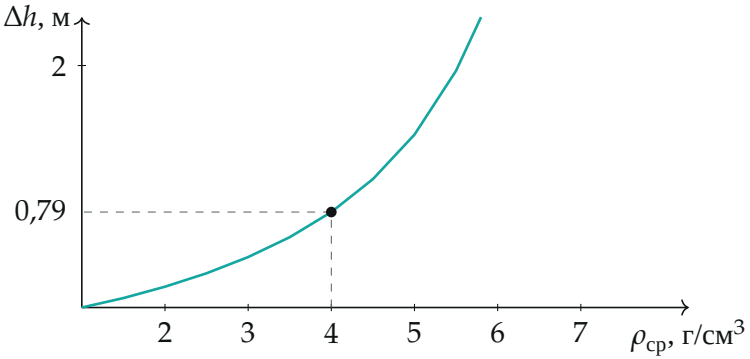
3. Подъём уровня. Соберём слагаемые с Δh в одну сторону:

$$\Delta h = h\,\frac{\rho_{\text{ср}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{ср}}} = 1\text{ м} \cdot \frac{4 - 1}{7{,}8 - 4} \approx 0{,}79\text{ м}.$$



Плотность по высоте «сплавленного» содержимого. Средняя $\rho_{ср}$ — уровень, при котором площади над и под пунктиром равны: $(7{,}8-4)\Delta h = (4-1)h$

Последний рисунок даёт второй взгляд на ту же формулу: железо добавляет к средней плотности избыток $(\rho_ж - \rho_{ср})\Delta h$, вода — недостаток $(\rho_{ср} - \rho_в)h$, и они должны уравновеситься. Это и есть «правило рычага» для смеси.



Подъём уровня от средней плотности при $h = 1$ м (по формуле ответа): при $\rho_{ср} \to 7{,}8$ г/см^3 железа нужно бесконечно много

Обратите внимание: в знаменателе средней плотности — объём $S(h+\Delta h)$, а не Sh: железо вытеснило воду вверх, и объём содержимого вырос.

Проверка. Размерность: Δh — длина, отношение плотностей безразмерно. Пределы: при $\rho_{ср} = \rho_в$ железа нет, $\Delta h = 0$; при $\rho_{ср} \to \rho_ж$ воды

почти нет, $\Delta h \to \infty$. Подстановка: $\dfrac{1 \cdot 1 + 7{,}8 \cdot 0{,}789}{1{,}789} \approx \dfrac{7{,}16}{1{,}789} \approx 4{,}0$ г/см^3 — как в условии.

Смысл: чтобы поднять среднюю плотность от 1 до 4 г/см^3, железа нужно почти столько же по объёму, сколько воды, — уровень поднимается на 0,79 от h.

Ответ. $\Delta h = h\dfrac{\rho_{\text{ср}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{ср}}} \approx 0{,}79$ м.