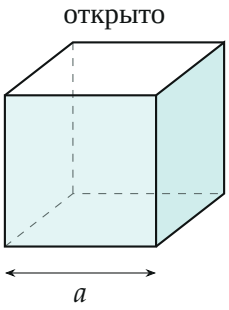
Краска для открытого куба

Задача 3. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 7 класс, задача 3] Для покраски внутренней поверхности контейнера в форме открытого сверху куба было потрачено столько же краски, сколько нужно, чтобы покрасить пол в комнате площадью $S = 20$ м^2. Найти объём контейнера. На все поверхности краска наносится слоем одинаковой толщины.



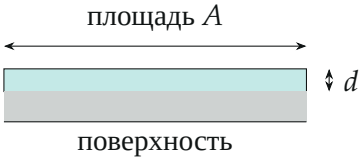
Поясняющий рисунок: контейнер — куб с ребром a без верхней грани; окрашена его внутренняя поверхность

▲ **Решение. Что происходит.** Слой краски везде одной толщины, поэтому расход краски пропорционален площади окрашенной поверхности. Значит, внутренняя поверхность контейнера имеет ту же площадь, что и пол, S. Внутренняя поверхность открытого куба — пять квадратов: дно и четыре стенки. Отсюда ребро, а по ребру — объём. Класс задачи — «одинаковый расход — одинаковая площадь».

Обозначения. a — ребро куба; d — толщина слоя краски; V — объём контейнера.

1. Расход краски — через площадь. Объём краски на поверхности площади A при толщине слоя d равен Ad. Толщина одна и та же, объёмы краски одинаковые, значит, равны и площади:

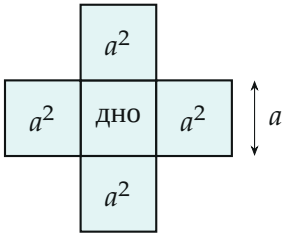
$$A_{\text{куба}}\, d = S\, d \quad \Rightarrow \quad A_{\text{куба}} = S.$$



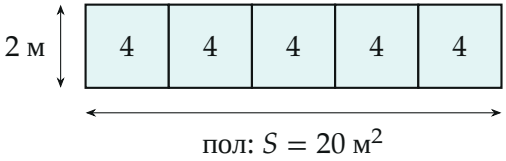
Слой краски толщины d на поверхности площади A: объём краски Ad (толщина на рисунке сильно увеличена)

2. Площадь внутренней поверхности. Развернём контейнер: дно и четыре стенки, каждая — квадрат $a \times a$:

$$A_{\text{куба}} = 5a^2 = S \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{S}{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}}\ \text{м} = 2\ \text{м}.$$



Развёртка открытого куба: пять одинаковых квадратов, площадь $5a^2$



Пол 20 м^2 складывается из пяти квадратов 2×2 м (по 4 м^2) — ровно пять граней контейнера

3. Объём.

$$V = a^3 = \left(\frac{S}{5}\right)^{3/2} = 2^3\ \text{м}^3 = 8\ \text{м}^3.$$

Обратите внимание: граней пять, а не шесть — куб открыт сверху. С шестью гранями получилось бы $a = \sqrt{20/6} \approx 1{,}83$ м и $V \approx 6{,}1$ м^3.

Проверка. Размерность: $(\text{м}^2)^{3/2} = \text{м}^3$. Обратный счёт: ребро 2 м, площадь пяти граней $5 \cdot 4 = 20$ м^2 — как у пола.

Смысл: краска «измеряет» площадь, и площадь пяти граней однозначно задаёт размер куба.

Ответ. $V = \left(\frac{S}{5}\right)^{3/2} = 8$ м^3.