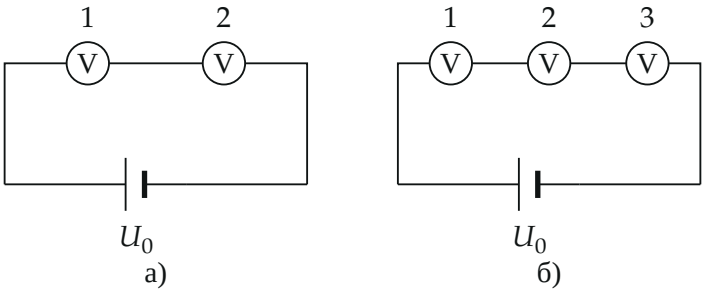
Вольтметры, включённые последовательно

Задача 2. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 8 класс, задача 2] К источнику электрического напряжения $U_0 = 18$ В подключают два вольтметра, соединённых последовательно. При этом первый вольтметр показывает напряжение $U_1 = 6$ В, второй — $U_2 = 2U_1 = 12$ В. Когда к источнику подключают три последовательно соединённых вольтметра, то третий показывает напряжение $U_3 = 9$ В. Найти показания первого и второго вольтметра.



Поясняющий рисунок: а) два вольтметра; б) три вольтметра последовательно

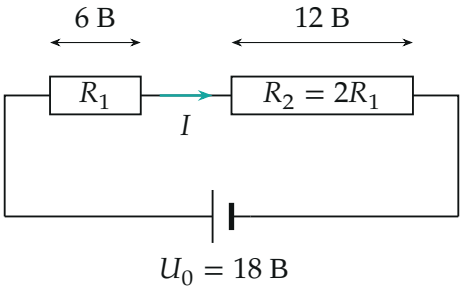
▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — такой же резистор, только он ещё показывает напряжение на самом себе. При последовательном соединении ток через все приборы один и тот же, поэтому напряжения на них пропорциональны их сопротивлениям. Первый опыт сообщает отношение сопротивлений первого и второго вольтметров, второй опыт — сколько напряжения досталось им двоим вместе. Класс задачи — неидеальные измерительные приборы в цепи.

Обозначения. R_1, R_2, R_3 — сопротивления вольтметров; I и I' — ток в первом и во втором опыте; U_1' и U_2' — искомые показания. Источник идеальный: напряжение на его выводах всегда U_0.

1. Отношение сопротивлений. Закон Ома для каждого вольтметра в первом опыте (ток I общий):

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{U_2}{U_1} = 2.$$

Проверим и сумму: $U_1 + U_2 = 18$ В $= U_0$ — всё напряжение источника легло на два прибора.



Вольтметры как резисторы: ток общий, поэтому напряжения относятся как сопротивления

2. Второй опыт: что осталось первым двум. Третий вольтметр показывает $U_3 = 9$ В, а вместе на трёх приборах — всё напряжение источника. Значит, на первых двух вместе

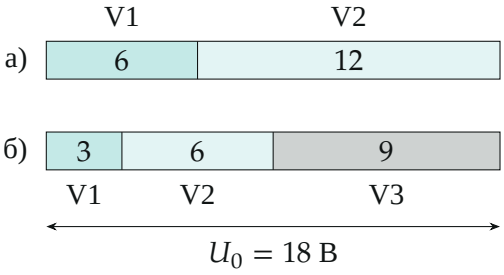
$$U_1' + U_2' = U_0 - U_3 = 18 - 9 = 9 \text{ В}.$$

3. Деление этих 9 В. Через первый и второй вольтметры опять течёт один ток I', и по закону Ома

$$\frac{U_2'}{U_1'} = \frac{I'R_2}{I'R_1} = 2.$$

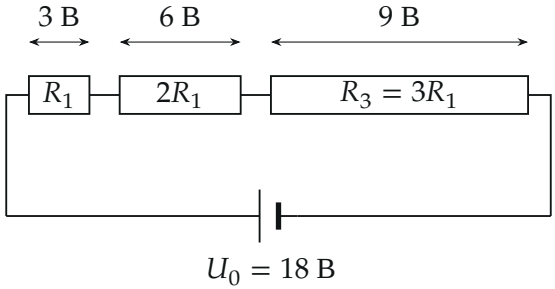
Отсюда $U_1' + 2U_1' = 9$ В:

$$U_1' = \frac{U_0 - U_3}{3} = 3 \text{ В}, \qquad U_2' = \frac{2(U_0 - U_3)}{3} = 6 \text{ В}.$$



Как делится 18 *В: а) в первом опыте; б) во втором — 9 В на третьем, остаток 9 В делится между первым и вторым в отношении* 1 : 2

Сопротивление третьего вольтметра заодно находится: на нём столько же, сколько на первых двух вместе, значит, $R_3 = R_1 + R_2 = 3R_1$.



Второй опыт: длины прямоугольников — в масштабе сопротивлений

Обратите внимание: показания первого и второго вольтметров изменились (было 6 и 12 В, стало 3 и 6 В), а их *отношение* — нет: оно задаётся только отношением сопротивлений.

Проверка. Сумма показаний во втором опыте: $3+6+9 = 18$ В $= U_0$. Второй способ: ток $I' = \dfrac{U_0}{R_1 + 2R_1 + 3R_1} = \dfrac{U_0}{6R_1}$, тогда $U_1' = I'R_1 = \dfrac{18}{6} = 3$ В, $U_2' = I' \cdot 2R_1 = 6$ В, $U_3 = I' \cdot 3R_1 = 9$ В — как в условии.

Смысл: последовательные вольтметры — делитель напряжения, и каждый показывает свою долю, пропорциональную своему сопротивлению.

Ответ. $U_1' = \dfrac{U_0 - U_3}{3} = 3$ В, $U_2' = \dfrac{2(U_0 - U_3)}{3} = 6$ В.