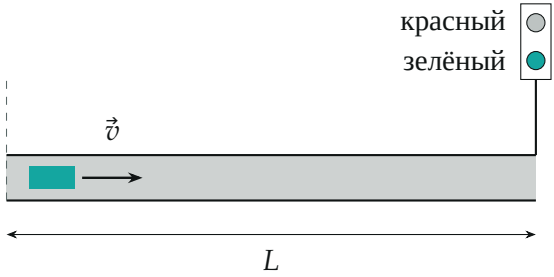
Пробка перед светофором

Задача 5. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 8 класс, задача 5] Перед светофором находится прямой участок дороги длиной $L = 1$ км. Зелёный сигнал включается на время $\Delta t = 1$ мин, затем сразу же на то же время включается красный сигнал (время горения жёлтого мало). При включении зелёного сигнала автомобили одновременно начинают двигаться с некоторой скоростью v, при включении красного — мгновенно останавливаются. Оказалось, что средняя на участке скорость автомобиля, въехавшего на него одновременно с включением зелёного сигнала, в 1,7 раза меньше v. Найти v.



Поясняющий рисунок: участок длины L перед светофором; автомобиль въезжает на него в момент включения зелёного

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль едет со скоростью v, пока горит зелёный (время Δt), и стоит, пока горит красный (тоже Δt). Средняя скорость — весь путь L, делённый на всё время, включая стоянки. Сколько стоянок успеет случиться на участке, зависит от v, и от этого числа зависит формула для средней скорости. Поэтому перебираем случаи по числу остановок n. Класс задачи — «перебор режимов».

Обозначения. n — число остановок автомобиля на участке; T — время прохождения участка; $v_{\text{ср}} = L/T$; безразмерная скорость $u = \dfrac{v\Delta t}{L}$ — доля участка, которую машина проходит за один зелёный.

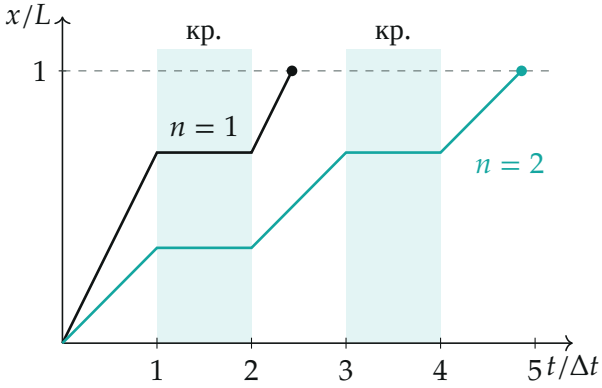
1. Время с n остановками. Остановок ровно n, если за n зелёных

машина ещё не доехала, а за $n+1$ — доехала:

$$nv\Delta t < L < (n+1)v\Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < u < \frac{1}{n}.$$

Все n остановок по Δt добавляются к времени чистого движения L/v:

$$T = \frac{L}{v} + n\Delta t.$$

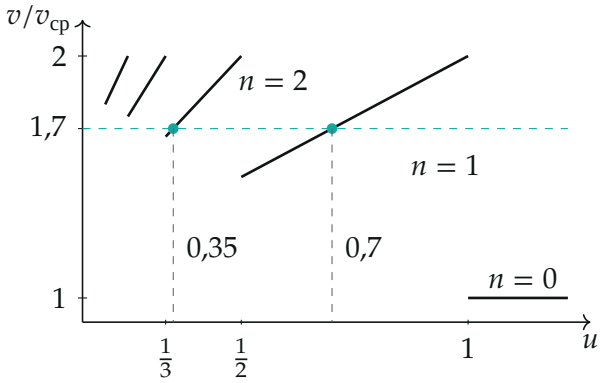


Координата машины от времени для двух найденных скоростей: чёрная — $v = 0{,}7L/\Delta t$ (одна остановка), бирюзовая — $v = 0{,}35L/\Delta t$ (две остановки); закрашено — красный сигнал

2. Отношение скоростей. Делим v на $v_{\text{ср}} = L/T$:

$$\frac{v}{v_{\text{ср}}} = \frac{vT}{L} = 1 + \frac{nv\Delta t}{L} = 1 + nu.$$

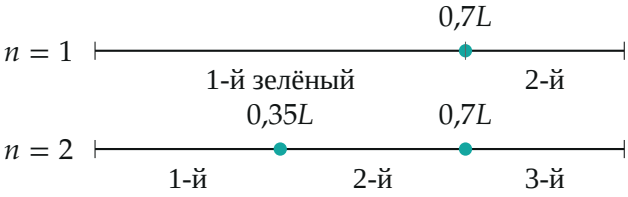
На своём интервале u эта величина растёт от $1 + \dfrac{n}{n+1}$ до 2. Без остановок ($u > 1$) отношение равно 1.



Отношение $v/v_{ср}$ от $u = v\Delta t/L$ (по формуле 1 + пи): «пила»; уровень 1,7 пересекает только зубцы $n = 1$ и $n = 2$

3. Какие n подходят. Ищем $1+nu = 1{,}7$, то есть $u = \dfrac{0{,}7}{n}$, и проверяем, лежит ли u в своём интервале.

- $n = 0$: отношение равно $1 \neq 1{,}7$ — не подходит.
- $n = 1$: $u = 0{,}7$, интервал $(\frac{1}{2};\ 1)$ — подходит: $v = \dfrac{0{,}7L}{\Delta t} = \dfrac{700\text{ м}}{60\text{ с}} \approx 11{,}7$ м/с.
- $n = 2$: $u = 0{,}35$, интервал $(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2})$ — подходит: $v = \dfrac{0{,}35L}{\Delta t} \approx 5{,}8$ м/с.
- $n \geq 3$: наименьшее значение отношения на зубце $1 + \dfrac{n}{n+1} \geq 1{,}75 > 1{,}7$ — не подходит.



Места остановок на участке (бирюзовые точки) и какие зелёные сигналы машина использует

Обратите внимание: ответов два. Число остановок заранее неизвестно, и при одной и при двух остановках отношение 1,7 достижимо.

Проверка. Размерность: $L/\Delta t$ — скорость. Числа: при $v = 0{,}7L/\Delta t$ время $T = \frac{\Delta t}{0{,}7} + \Delta t = \frac{1{,}7}{0{,}7}\Delta t$, и $v/v_{\text{ср}} = \frac{0{,}7}{1} \cdot \frac{1{,}7}{0{,}7} = 1{,}7$; при $v = 0{,}35L/\Delta t$: $T = \frac{\Delta t}{0{,}35} + 2\Delta t = \frac{1{,}7}{0{,}35}\Delta t$, отношение снова 1,7 (то же видно на графике $x(t)$: $2{,}43\Delta t$ против $1{,}43\Delta t$ и $4{,}86\Delta t$ против $2{,}86\Delta t$).

Смысл: на участке машина теряет по Δt на каждой остановке, и одна и та же доля потерянного времени получается и у быстрой машины с одной остановкой, и у медленной с двумя.

Ответ. $v = \dfrac{0{,}7L}{\Delta t} \approx 11{,}7$ м/с (одна остановка) или $v = \dfrac{0{,}35L}{\Delta t} \approx 5{,}8$ м/с (две остановки).