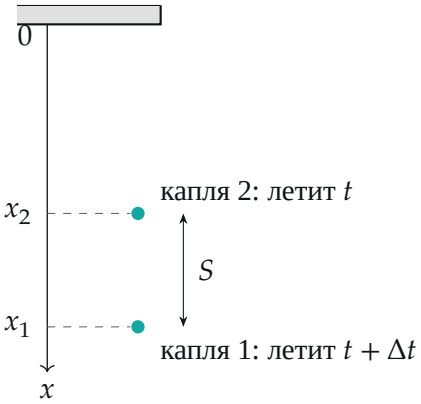
Капли, падающие с крыши

Задача 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 9 класс, задача 1] С крыши с равными интервалами времени падают дождевые капли. Известно, что через время $t = 1$ с после отрыва некоторой капли от крыши расстояние между ней и предыдущей каплей было равно $S = 3$ м. Найти интервал времени между моментами отрыва соседних капель. $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: положения капель в момент, когда капля 2 летит время t, а предыдущая капля 1 — время $t + \Delta t$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на равноускоренное движение двух тел, стартовавших из одной точки с одинаковым ускорением g, но в разные моменты. Предыдущая капля оторвалась на Δt раньше, поэтому к моменту наблюдения она летит дольше и ушла дальше. Расстояние между каплями — разность двух путей свободного падения; оно растёт со временем, и по его значению в данный момент находится Δt.

Обозначения. Δt — интервал между отрывами соседних капель; ось x направлена вертикально вниз, начало — у края крыши; отсчёт времени ведём от отрыва капли 2 («некоторой» капли); капля 1 — предыдущая; x_1, x_2 — их координаты в момент t. Сопротивлением воздуха пренебрегаем, начальная скорость капель нулевая.

1. Законы движения капель. Обе капли падают свободно без начальной скорости, поэтому координата равна $g\tau^2/2$, где τ — время полёта.

Капля 2 летит время t, капля 1 — время $t + \Delta t$:

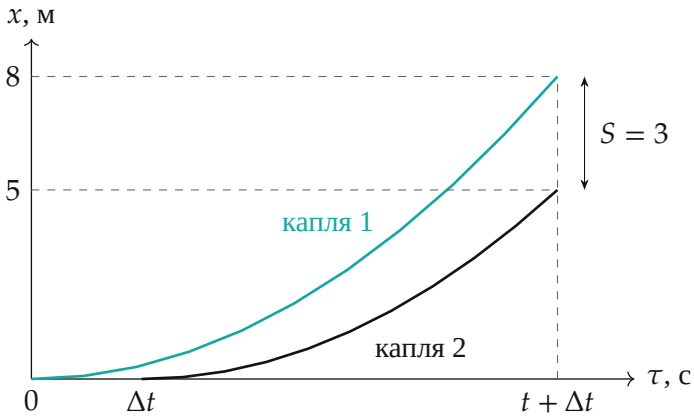
$$x_2 = \frac{gt^2}{2}, \qquad x_1 = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2}.$$

2. Расстояние между каплями. Капля 1 ниже, $x_1 - x_2 = S$:

$$\frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = S \quad \Rightarrow \quad \Delta t^2 + 2t\,\Delta t - \frac{2S}{g} = 0.$$

Квадратное уравнение имеет корни $\Delta t = -t \pm \sqrt{t^2 + 2S/g}$; интервал положителен, берём знак «+»:

$$\Delta t = \sqrt{t^2 + \frac{2S}{g}} - t = \sqrt{1 + 0{,}6} - 1 \approx 0{,}26 \text{ с}.$$



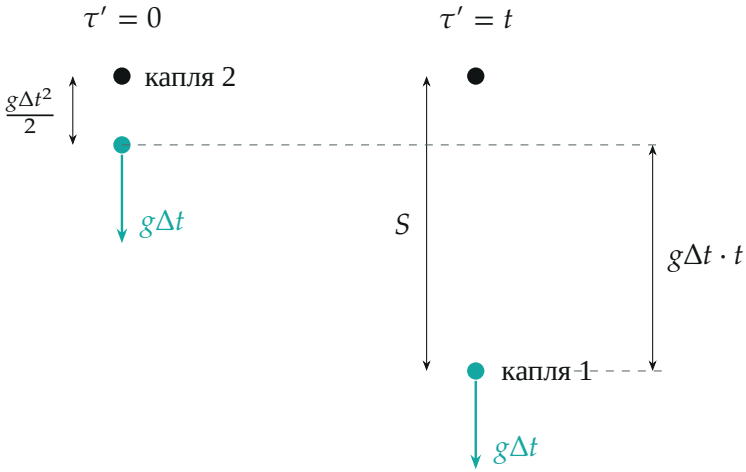
Координаты капель; время τ отсчитано от отрыва капли 1. Капля 2 стартует на $\Delta t \approx 0{,}26$ с позже; в момент $\tau = t + \Delta t$ расстояние между ними 3 м. Построено по найденному Δt

3. Второй способ — в системе отсчёта капли 2. Обе капли падают с одинаковым ускорением g, поэтому в системе отсчёта, связанной с каплей 2, капля 1 движется *равномерно*: относительное ускорение $g - g = 0$.

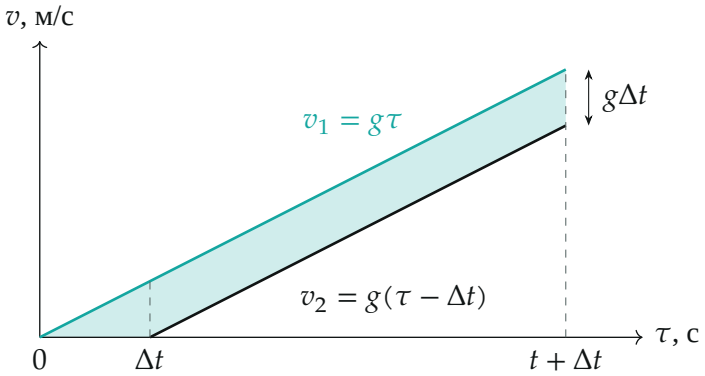
В момент отрыва капли 2 капля 1 уже пролетела $g\Delta t^2/2$ и имела скорость $g\Delta t$ — это и есть её постоянная скорость относительно капли 2. За время t расстояние выросло на $g\Delta t \cdot t$:

$$S = \frac{g\Delta t^2}{2} + g\,\Delta t\,t$$

— то же уравнение, что в пункте 2.



В системе отсчёта капли 2 (она покоится в начале) капля 1 движется равномерно со скоростью $g\Delta t$; τ' — время от отрыва капли 2



Скорости капель. Закрашенная площадь между графиками — расстояние S между каплями: треугольник $g\Delta t^2/2$ плюс параллелограмм $g\Delta t \cdot t$

Обратите внимание. Расстояние между каплями не постоянно: разность скоростей $g\Delta t$ постоянна, поэтому расстояние растёт линейно. Ошибка «$S = g\Delta t^2/2$» (расстояние в момент отрыва) не учитывает этот рост.

Проверка. Размерность: $\sqrt{t^2 + 2S/g}$ — секунды. Подстановка: при $\Delta t = 0{,}2649$ с капля 1 пролетела $\frac{10 \cdot 1{,}2649^2}{2} = 8{,}0$ м, капля 2 — 5,0 м, разность 3,0 м — верно. Предел: при $t \gg \sqrt{2S/g}$ (капли давно летят) $\Delta t \approx \dfrac{S}{gt}$ — расстояние определяется постоянной относительной скоростью $g\Delta t$, как и следует из второго способа.

Смысл: в падающей системе отсчёта соседняя капля летит равномерно, поэтому интервал между отрывами находится из простого уравнения для равномерного и равноускоренного кусков пути.

Ответ. $\Delta t = \sqrt{t^2 + \dfrac{2S}{g}} - t \approx 0{,}26$ с.