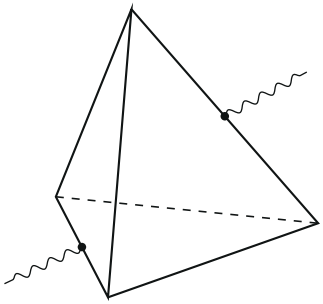
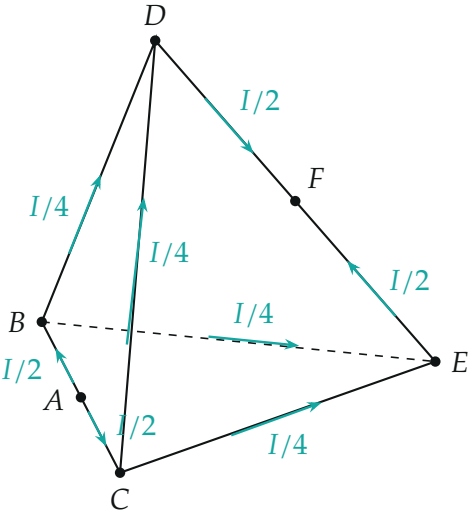
Сопротивление проволочной пирамиды

Задача 4. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Из проволоки сделали правильную пирамиду, все рёбра которой имеют одинаковую длину и одинаковое сопротивление R. К серединам двух противоположных сторон подключают источник электрического напряжения (см. рисунок). Чему равно сопротивление пирамиды?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на сопротивление цепи с симметрией. Пирамида с одинаковыми рёбрами — правильный тетраэдр: шесть рёбер, у каждого ребра есть «противоположное», с которым оно не имеет общих вершин. Источник подключён к серединам двух противоположных рёбер, и симметрия цепи заставляет ток в каждой развилке делиться поровну. Тогда напряжения на всех проводниках находятся сразу, а сопротивление — как отношение напряжения к току.

Обозначения. Вершины тетраэдра B, C, D, E; A — середина ребра BC, F — середина противоположного ребра DE; I — ток через источник (втекает в A, вытекает из F); φ — потенциалы точек. Половина ребра имеет сопротивление $R/2$.



Токи в проводниках: в A ток I делится на две половины ребра BC, в B и C — ещё раз пополам, к D и E; в F сходятся две половины ребра DE

1. Симметрия. Цепь переходит в себя при отражении, которое меняет местами B и C (плоскость через A и ребро DE): точки A и F остаются на месте. Значит, $\varphi_B = \varphi_C$ и токи в симметричных проводниках одинаковы. Так же отражение, меняющее местами D и E (плоскость через F и ребро BC), даёт $\varphi_D = \varphi_E$.

2. Токи. В точке A ток I делится между половинами AB и AC поровну: $I_{AB} = I_{AC} = \dfrac{I}{2}$. В вершине B ток $\dfrac{I}{2}$ уходит в рёбра BD и BE; эти рёбра одинаковы и $\varphi_D = \varphi_E$, поэтому токи в них по закону Ома равны: $I_{BD} = I_{BE} = \dfrac{I}{4}$; так же у C. В D сходятся $I_{BD} + I_{CD} = \dfrac{I}{2}$, и этот ток идёт по половине DF; так же по EF. Закон сохранения заряда (первое правило Кирхгофа) в каждом узле выполнен.

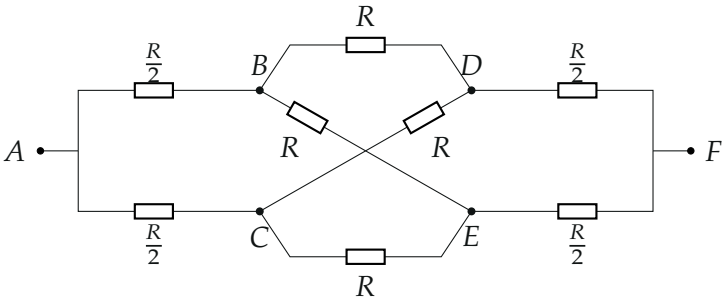
3. Напряжения. Закон Ома для каждого проводника:

$$U_{AB} = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{IR}{4}, \qquad U_{BD} = \frac{I}{4}\cdot R = \frac{IR}{4}, \qquad U_{DF} = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{IR}{4}.$$

Напряжение между точками подключения — сумма напряжений вдоль

любого пути, например $A \to B \to D \to F$:

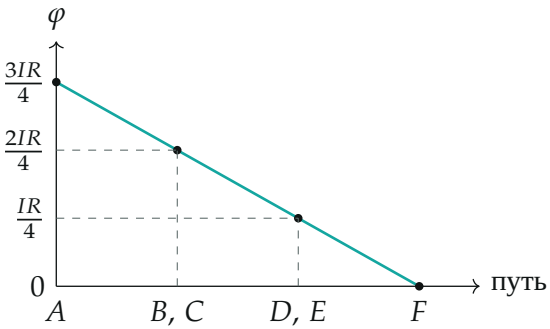
$$U_{AF} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DF} = \frac{3IR}{4}, \qquad R_{\text{пир}} = \frac{U_{AF}}{I} = \frac{3R}{4}.$$



Та же цепь на плоскости: половины рёбер AB, AC, четыре боковых ребра BD, BE, CD, CE, половины DF, EF

4. Второй способ — соединим точки с равными потенциалами. Раз $\varphi_B = \varphi_C$, точки B и C можно соединить проводом — токи не изменятся; так же D и E. Получаются три последовательных участка: две половины $R/2$ параллельно, четыре ребра R параллельно, две половины $R/2$ параллельно:

$$R_{\text{пир}} = \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}.$$



Потенциалы точек (за нуль взят φ_F): на каждом из трёх участков напряжение одинаково, $IR/4$

Обратите внимание. Ребро BC, к середине которого подключён источник, не «закорочено»: ток идёт по обеим его половинам, просто в разные стороны от A. А ток по ребру между B и C напрямую не течёт — такого проводника, кроме половин через A, нет.

Проверка. Размерность — ом. Сравнение: если подключить источник к двум соседним вершинам тетраэдра, сопротивление $R/2$; здесь путь длиннее (от середины до середины противоположного ребра), и $\frac{3}{4}R > \frac{1}{2}R$ — разумно. Первое правило Кирхгофа выполнено в каждом узле, а напряжение по пути $A \to C \to E \to F$ даёт то же $\frac{3IR}{4}$.

Смысл: симметрия делит ток поровну в каждой развилке, и тетраэдр превращается в три одинаковых последовательных участка по $R/4$.

Ответ. $R_{\text{пир}} = \dfrac{3R}{4}$.