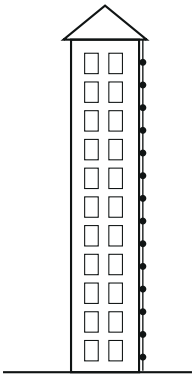
Цепочка резинок и грузов с небоскрёба

Задача 5. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 9 класс, задача 5] К крыше небоскрёба высотой $H = 100$ м прикрепляют резинку длиной $l = 50$ см с коэффициентом жёсткости $k = 100$ Н/м и точечный груз массой $m = 1$ кг. К грузу крепят ещё одну такую же резинку, ещё такой же груз, снова резинку, снова груз и т. д. (см. рисунок). Сколько резинок нужно прикрепить таким образом к крыше, чтобы последний груз коснулся земли? Считать, что под действием тяжести грузов резинки не рвутся, и для любых удлинений резинок справедлив закон Гука. Весом самих резинок пренебречь.



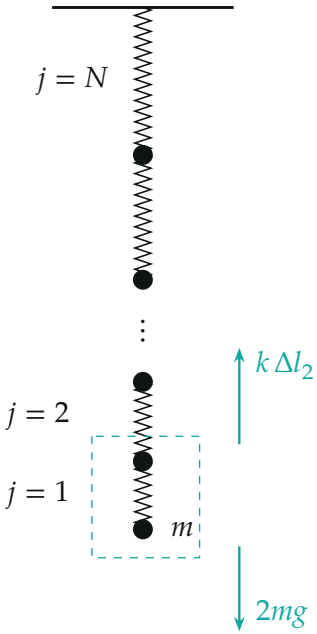
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие цепочки грузов на пружинах (закон Гука) плюс сумма арифметической прогрессии. Каждая резинка держит все грузы, висящие ниже неё: нижняя — один, следующая — два, верхняя — все N. Поэтому удлинения резинок растут снизу вверх как $1, 2, 3, \ldots$, и полная длина цепочки — сумма длин нерастянутых резинок и арифметической прогрессии удлинений. Ищем наименьшее N, при котором длина цепочки не меньше H.

Обозначения. N — число резинок (и грузов); резинки нумеруем снизу: $j = 1$ — нижняя, $j = N$ — верхняя; Δl_j — удлинение j-й резинки; $L(N)$ — расстояние от крыши до нижнего груза.

1. Сила, растягивающая резинку j. Рассмотрим систему «j нижних грузов вместе с резинками между ними». На неё действуют силы тяжести $j\,mg$ вниз и сила упругости резинки j вверх; резинки внутри системы

невесомы и дают только внутренние силы. Система покоится, второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$k\,\Delta l_j - j\,mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta l_j = \frac{j\,mg}{k}.$$



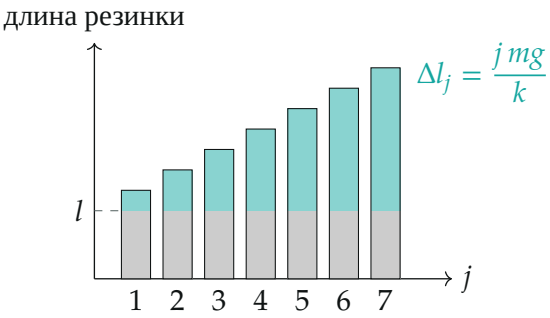
система «2 нижних груза»

Цепочка: удлинение резинки j находим из равновесия всех грузов ниже неё (на рисунке — система из двух нижних грузов, её держит резинка $j = 2$)

Резинка j прикреплена снизу к j-му снизу грузу, под которым висят ещё $j-1$ грузов, — всего она держит j грузов. На рисунке выделены два нижних груза, их держит вторая снизу резинка: $k\Delta l_2 = 2mg$.

2. Длина цепочки. Сумма длин всех растянутых резинок:

$$L(N) = N\,l + \sum_{j=1}^{N} \frac{j\,mg}{k} = N\,l + \frac{mg}{k} \cdot \frac{N(N+1)}{2}.$$



Длины резинок: нерастянутая часть l (серая) у всех одна, удлинение (бирюзовое) растёт линейно с номером снизу

3. Условие касания земли. Нижний груз коснётся земли, если $L(N) \geq H$:

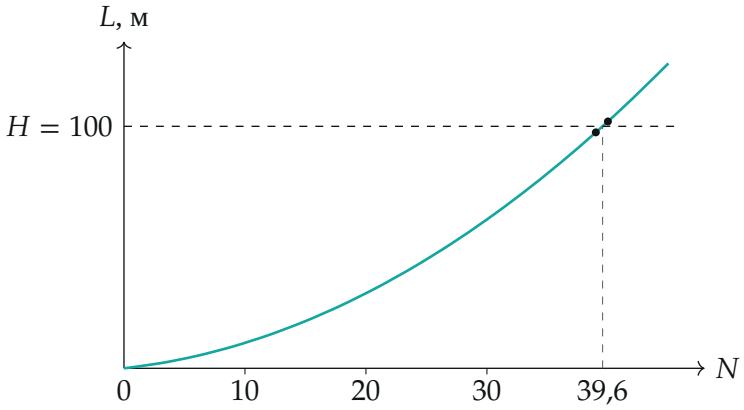
$$\frac{mg}{2k}N^2 + \left(l + \frac{mg}{2k}\right)N - H \geq 0.$$

Числа: $\frac{mg}{2k} = 0{,}05$ м, $l + \frac{mg}{2k} = 0{,}55$ м. Положительный корень квадратного уравнения (L растёт с N, поэтому неравенство выполнено правее корня):

$$N_0 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{kl}{mg}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{kl}{mg}\right)^2 + \frac{2kH}{mg}},$$

$$N_0 = -5{,}5 + \sqrt{30{,}25 + 2000} \approx 39{,}6.$$

Число резинок целое, поэтому $N = 40$.



Расстояние от крыши до нижнего груза в зависимости от числа резинок (по формуле пункта 2): прямую $L = H$ кривая пересекает при $N_0 \approx 39{,}6$; точки — $N = 39$ (97,5 м) и $N = 40$ (102 м)

Обратите внимание. Удлинения резинок разные: верхняя растянута в N раз сильнее нижней. Если считать все резинки растянутыми одинаково (весом одного груза), получится $N(l + mg/k) \geq H$, $N \geq 167$ — в четыре с лишним раза больше верного.

Проверка. Размерность: $\frac{kl}{mg}$ и $\frac{kH}{mg}$ безразмерны — N число. Прямая подстановка: при $N = 39$ цепочка имеет длину $39 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot 39 \cdot 40 = 19{,}5 + 78 = 97{,}5$ м < 100 м, при $N = 40$ — $20 + 82 = 102$ м ≥ 100 м. Предел: при очень жёстких резинках ($k \to \infty$) удлинений нет и нужно $N = H/l = 200$ резинок; по формуле при $\frac{kl}{mg} \gg 1$ корень даёт $N_0 \approx \frac{H}{l}$ — верно.

Смысл: каждая резинка растянута весом всех грузов под ней, поэтому вклад удлинений растёт как квадрат числа резинок и быстро обгоняет вклад их собственной длины.

Ответ. $N = 40$.