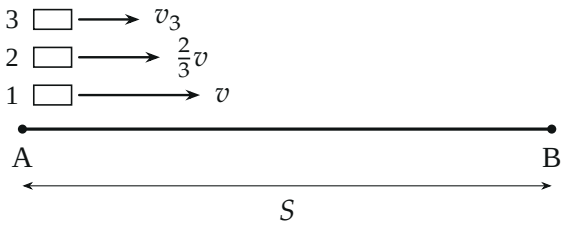
Три машины из A в B

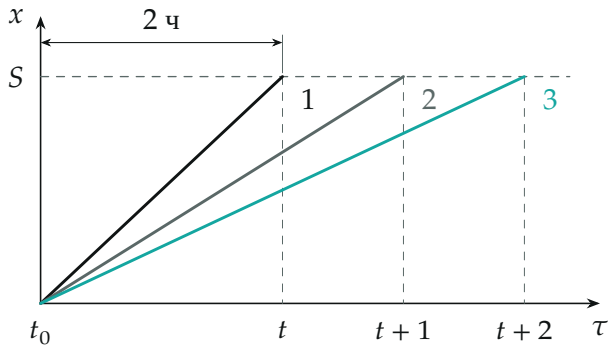
Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 1] Три машины одновременно выехали из города A в город B и ехали по одной дороге с постоянными скоростями. Скорость первой машины была v, второй — $2v/3$. Известно, что первая машина приехала в город B, когда часы показывали t часов, вторая — когда часы показывали $t + 1$ часов, третья — когда часы показывали $t + 2$ часов. Найти скорость третьей машины.



Поясняющий рисунок: три машины стартуют из A одновременно и едут один и тот же путь S с разными скоростями

▲ **Решение. Что происходит.** Все три машины проезжают один и тот же путь S, выехав в один и тот же неизвестный момент t_0. Часы показывают моменты прибытия, а не время в пути — поэтому сначала найдём момент выезда. Главная идея: путь у машин общий, значит, время в пути обратно пропорционально скорости. Первые две машины с известными скоростями дают момент выезда, а третья — свою скорость. Класс задачи — равномерное движение, «часы против времени в пути».

Обозначения. t_0 — показание часов в момент выезда, S — расстояние AB, v_3 — искомая скорость. Времена в пути: $t - t_0$, $t + 1 - t_0$, $t + 2 - t_0$.



Графики координаты от времени: общий старт в момент t_0, наклон прямой — скорость машины. Прибытия разнесены на 1 ч

1. Момент выезда. Для равномерного движения путь равен скорости, умноженной на время в пути. Запишем это для первой и второй машин и приравняем (путь один и тот же):

$$S = v\,(t - t_0) = \frac{2}{3} v\,(t + 1 - t_0).$$

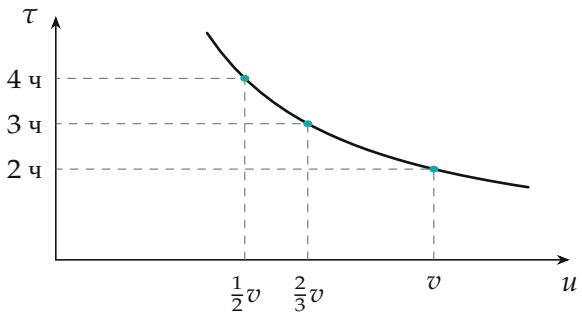
Скорость v сокращается, и неизвестным осталось только время в пути первой машины $t - t_0$:

$$3(t - t_0) = 2(t - t_0) + 2 \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = 2 \text{ ч}.$$

Первая машина ехала 2 часа, вторая — 3, третья — 4. Значит, $S = v \cdot 2$ ч.

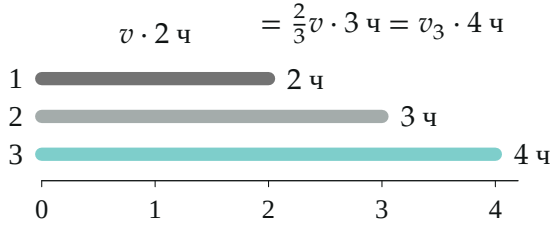
2. Скорость третьей машины. Тот же закон для первой и третьей машин:

$$v\,(t - t_0) = v_3\,(t + 2 - t_0) \quad \Rightarrow \quad 2v = 4v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \frac{v}{2}.$$



Время в пути τ от скорости и при пути $S = 2v \cdot 1$ ч: гипербола S/u. Точки — три машины; каждый лишний час дороги соответствует своей скорости

Обратите внимание: t в условии — показание часов, а не время в пути. Если подставить t вместо времени в пути, получится лишняя неизвестная, и задача «не решается». Неизвестный момент выезда t_0 находится из первых двух машин.



Время в пути каждой машины (полосы, шкала в часах): произведение скорости на время — путь S — у всех трёх одно и то же

Проверка. Размерность: v_3 выражена через скорость. Второй способ: при общем пути время обратно пропорционально скорости, $\tau_2/\tau_1 = v/(2v/3) = 3/2$; разность $\tau_2 - \tau_1 = 1$ ч, значит, $\tau_1 = 2$ ч, $\tau_3 = \tau_1 + 2 = 4$ ч и $v_3 = v\,\tau_1/\tau_3 = v/2$. Знак: третья машина приехала позже всех — её скорость меньше всех, $v/2 < 2v/3 < v$.

Смысл: показания часов дают только разности времён, и две машины с известными скоростями нужны, чтобы восстановить само время в пути.

Ответ. $v_3 = \dfrac{v}{2}$.