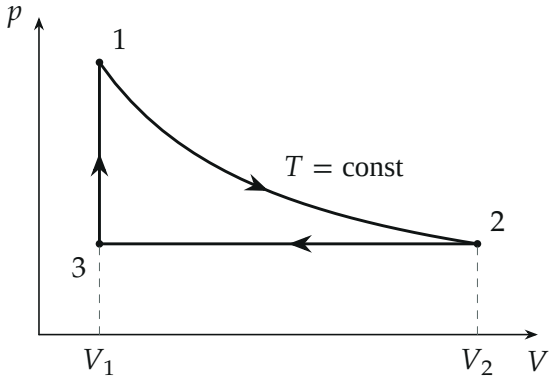
Цикл с гелием

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Порция гелия участвует в следующем процессе: сначала газ совершает изотермическое расширение, получив количество теплоты Q, затем его подвергли изобарическому сжатию, совершив над ним работу $A = Q/3$, а затем изохорически вернули к первоначальному состоянию. Найти термодинамический КПД этого цикла и среднюю мощность двигателя, работающего по такому циклу, если весь цикл длится Δt.



Поясняющий рисунок: цикл на pV-диаграмме (схематично): 1–2 — изотерма, 2–3 — изобара, 3–1 — изохора

▲ **Решение. Что происходит.** Газ проходит цикл из трёх участков. КПД — это работа газа за цикл, делённая на теплоту, которую газ *получил* за цикл (на участках, где теплота положительна). Главная идея: на изохоре работы нет, вся теплота идёт во внутреннюю энергию, а изменение внутренней энергии на изохоре 3–1 противоположно изменению на изобаре 2–3 — его даёт работа на изобаре. Класс задачи — КПД цикла: где газ получает тепло, первое начало на каждом участке.

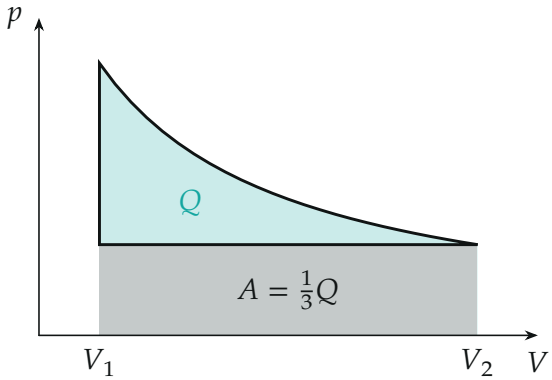
Обозначения. Состояния 1, 2, 3 — как на рисунке. ν — количество гелия. Гелий одноатомный: $U = \frac{3}{2}\nu RT$. A_{12}, Q_{12}, ΔU_{12} — работа газа, полученная газом теплота и изменение внутренней энергии на участке 1–2 (так же для других).

1. Изотерма 1–2. Температура постоянна, поэтому $\Delta U_{12} = 0$, и по первому началу термодинамики $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$ вся полученная теплота идёт в работу газа: $A_{12} = Q_{12} = Q > 0$. Газ получает тепло.

2. Изобара 2–3. Над газом совершают работу A, значит, работа газа $A_{23} = -A$. Для изобары $A_{23} = p_2(V_1 - V_2) = \nu R(T_3 - T_2)$, поэтому

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}A_{23} = -\frac{3}{2}A, \qquad Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = -\frac{5}{2}A < 0.$$

Газ остывает и отдаёт тепло.



Площадь под изотермой — работа газа Q на 1–2 (бирюзовая и серая части вместе), площадь под изобарой — работа A над газом на 2–3 (серая). Работа за цикл — площадь цикла (бирюзовая), Q – A

3. Изохора 3–1. Объём постоянен, $A_{31} = 0$. Цикл замкнут, внутренняя энергия возвращается к исходной: $\Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$, откуда $\Delta U_{31} = \frac{3}{2}A$. По первому началу

$$Q_{31} = \Delta U_{31} = \frac{3}{2}A > 0.$$

Газ нагревается и получает тепло. Второй способ: на изохоре и на изобаре температура меняется между теми же значениями T_3 и $T_1 = T_2$, только в обратную сторону, поэтому $\Delta U_{31} = -\Delta U_{23}$.

4. КПД. Работа газа за цикл — сумма работ на участках:

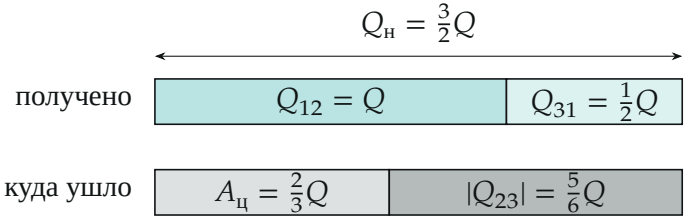
$$A_{\text{ц}} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = Q - A.$$

Теплота, полученная от нагревателя, — сумма положительных теплот (участки 1–2 и 3–1):

$$Q_{\text{н}} = Q + \frac{3}{2}A.$$

КПД:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q - A}{Q + \frac{3}{2}A} = \frac{2(Q - A)}{2Q + 3A} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}Q}{2Q + Q} = \frac{4}{9}.$$

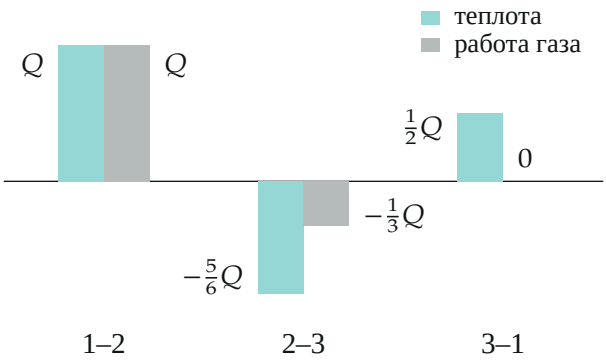


Баланс энергии за цикл в долях Q: полученная теплота $\frac{3}{2}Q$ делится на работу $\frac{2}{3}Q$ и теплоту $\frac{5}{6}Q$, отданную на изобаре; $\eta = \frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{4}{9}$

Обратите внимание: в $Q_{\text{н}}$ входит теплота изохоры $\frac{3}{2}A$. Если взять только Q изотермы, получится $\eta = \frac{2}{3}$ — завышенный ответ. Теплоту, отданную на изобаре, из $Q_{\text{н}}$ не вычитают.

5. Средняя мощность. За время цикла Δt двигатель совершает работу $A_{\text{ц}}$, поэтому

$$N = \frac{A_{\text{ц}}}{\Delta t} = \frac{Q - A}{\Delta t} = \frac{2Q}{3\,\Delta t}.$$



Теплота, полученная газом, и работа газа на каждом участке в долях Q. Положительные теплоты (1–2 и 3–1) образуют $Q_н$

Проверка. Размерность: η безразмерен, N — джоуль в секунду. Предел: при $A \to 0$ на изобаре почти нет работы и теплообмена, и $\eta \to 1$ — вся теплота изотермы в работе (цикл тогда требует бесконечно большого V_2/V_1, это лишь предел формулы); при $A = Q$ работа цикла нулевая и $\eta = 0$. Существование цикла: для изотермы $Q = \nu RT\ln(V_2/V_1)$, для изобары $A = \nu RT(1 - V_1/V_2)$; условие $A = Q/3$ выполняется при $V_2/V_1 \approx 16{,}8$, и при этих объёмах прямой расчёт даёт $\eta = 0{,}4444 = \frac{4}{9}$.

Смысл: из полученной газом теплоты в работу уходит меньше половины, остальное газ отдаёт при изобарическом сжатии.

Ответ. $\eta = \dfrac{2(Q-A)}{2Q+3A} = \dfrac{4}{9}$; $\quad N = \dfrac{Q-A}{\Delta t} = \dfrac{2Q}{3\,\Delta t}$.