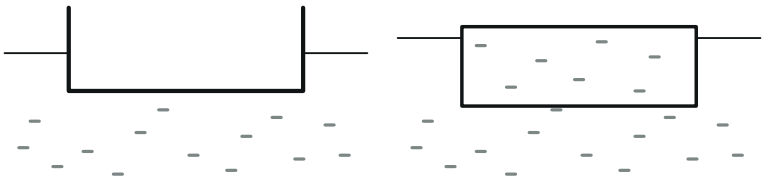
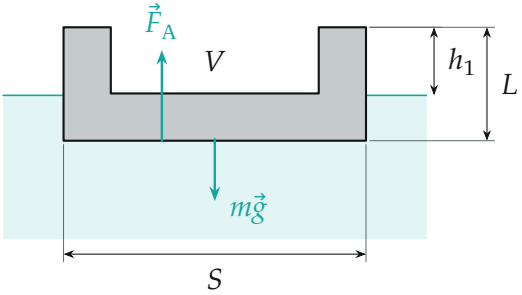
Деревянная коробка на воде

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 4] Прямоугольная деревянная коробка имеет массу m и вмещает объём воды V. Если опустить коробку в воду (левый рисунок), над поверхностью будет выступать край коробки высотой h_1. На какую высоту над поверхностью воды будет выступать край коробки, если её полностью заполнить водой и опустить в воду (правый рисунок)? Плотность дерева составляет $2/3$ от плотности воды.



▲ **Решение. Что происходит.** Коробка плавает: сила тяжести уравновешена силой Архимеда. В первом опыте вытеснена вода объёмом m/ρ_0, а над водой — часть наружного объёма. Во втором опыте добавилась вода внутри; она весит ровно столько, сколько весит такой же объём воды снаружи. Главная идея: на воду внутри коробки действуют силы так же, как на окружающую воду, поэтому коробка с водой плавает так, как плавало бы одно дерево. Класс задачи — плавание: условие равновесия для двух состояний и деление уравнений.

Обозначения. ρ_0 — плотность воды, $\rho = \frac{2}{3}\rho_0$ — дерева. S — площадь наружного сечения коробки (стенки вертикальны), L — наружная высота. Объём дерева $m/\rho = \frac{3m}{2\rho_0}$. h_2 — искомая высота.



Пустая коробка (разрез, в масштабе задачи при $\rho = \frac{2}{3}\rho_0$): погружена на $L - h_1$, внутри — полость объёма V

1. Объём коробки. Наружный объём складывается из объёма дерева и полости:

$$SL = \frac{m}{\rho} + V = \frac{3m}{2\rho_0} + V.$$

2. Пустая коробка плавает. Условие равновесия (сила Архимеда равна силе тяжести), погружённый объём $S(L - h_1)$:

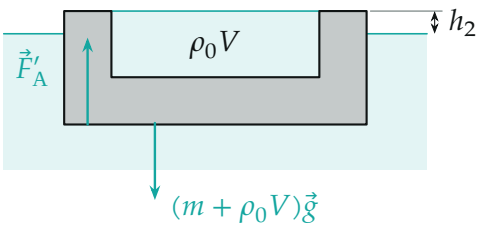
$$\rho_0 g\, S(L - h_1) = mg \quad \Rightarrow \quad Sh_1 = SL - \frac{m}{\rho_0} = \frac{m}{2\rho_0} + V.$$

Объём над водой равен «лишнему» объёму дерева $\frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_0} = \frac{m}{2\rho_0}$ плюс вся полость.

3. Коробка с водой плавает. Масса выросла на $\rho_0 V$, погружённый объём — $S(L - h_2)$:

$$\rho_0 g\, S(L - h_2) = (m + \rho_0 V)g \quad \Rightarrow \quad Sh_2 = SL - \frac{m}{\rho_0} - V = \frac{m}{2\rho_0}.$$

Полость больше не выступает: над водой остаётся только «лишний» объём дерева.



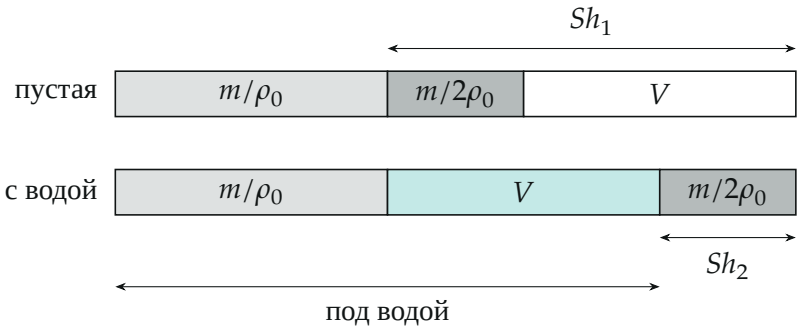
Коробка, заполненная водой, в том же масштабе: выступает на $h_2 = h_1/3$ (при выбранных на рисунке m и V)

4. Ответ делением. Делим результат пункта 3 на результат пункта 2 — площадь S сокращается:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{m/(2\rho_0)}{m/(2\rho_0) + V} \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 \frac{m}{m + 2\rho_0 V}.$$

Знак: $h_2 < h_1$ — заполненная коробка сидит глубже.

Второй способ (идея из «Что происходит»): вода внутри коробки в равновесии с окружающей, поэтому коробка с водой выступает так же, как выступало бы одно дерево той же формы. Дерево вытесняет m/ρ_0, а занимает m/ρ, значит, над водой $\frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_0} = \frac{m}{2\rho_0}$ — то же, что в пункте 3.



Наружный объём коробки SL полосой: под водой — то, что уравновешивает вес (дерево m/ρ_0 и, во втором случае, вода V), над водой — остальное

Проверка. Размерность: $\rho_0 V$ — масса, отношение безразмерно, h_2 — длина. Пределы: $V \to 0$ (полости нет) — $h_2 = h_1$, коробка и есть брусок дерева; $m \to 0$ (невесомые стенки) — $h_2 \to 0$, коробка с водой — просто вода. Через ρ в общем виде: $h_2 = h_1\left[1 - \frac{V}{V + m(\rho_0 - \rho)/(\rho_0\rho)}\right]$, при $\rho = \frac{2}{3}\rho_0$ — то же.

Смысл: заполненная коробка выступает над водой ровно на столько, на сколько выступало бы дерево её стенок само по себе.

Ответ. $h_2 = h_1\left(1 - \frac{2\rho_0 V}{2\rho_0 V + m}\right) = h_1 \frac{m}{2\rho_0 V + m}$, где ρ_0 — плотность воды.