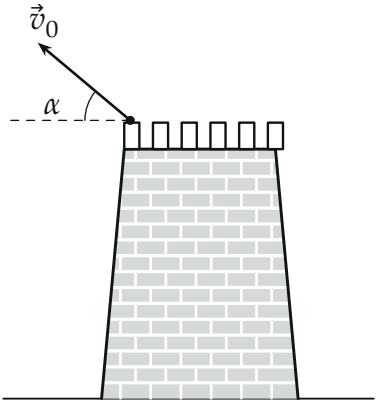
Два камешка с интервалом

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 5] С высокой башни бросают два маленьких камешка с интервалом времени Δt. Начальные скорости камешков одинаковы и направлены под одним и тем же углом α ($\alpha > 0$; см. рисунок). Найти минимальное расстояние между камешками в процессе последующего движения. В какой момент времени расстояние между камешками достигнет минимального значения. Начальные скорости камешков v_0, сопротивлением воздуха пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Оба камешка летят по одной и той же параболе, второй — с отставанием Δt. Главная идея: оба движутся с одним ускорением $\vec{g}$, поэтому в системе отсчёта одного камешка другой движется *равномерно и прямолинейно*. Вектор между ними меняется линейно со временем, и его длина — расстояние от точки до прямой. Ещё удобнее: этот вектор равен Δt, умноженному на скорость камешка в средний момент; минимум расстояния — минимум скорости, то есть верхняя точка параболы. Класс задачи — относительное движение тел с общим ускорением.

Обозначения. Время t отсчитываем от броска первого камешка; второй брошен в момент Δt. Начало координат — точка броска, $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ — радиус-векторы камешков, $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Ось x — горизонтально в сторону броска, y — вверх. Расстояние интересует нас при $t \geqslant \Delta t$, когда летят оба.

1. Вектор между камешками. Движение с постоянным ускорением $\vec{g}$:

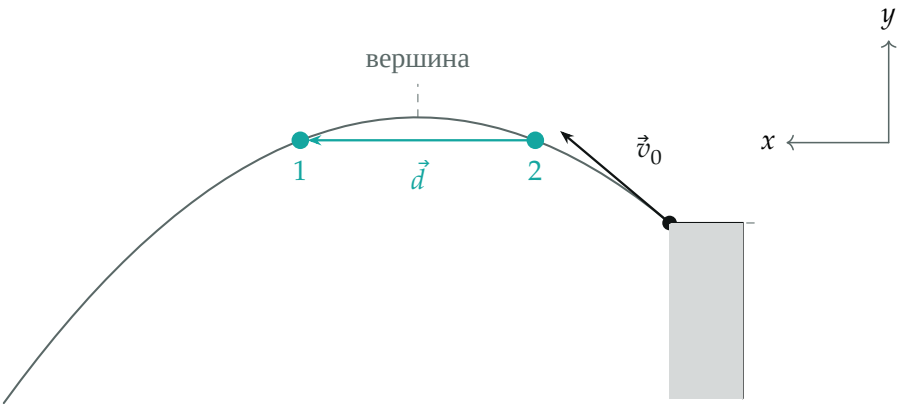
$$\vec{r}_1 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{v}_0 (t - \Delta t) + \frac{\vec{g}(t-\Delta t)^2}{2}.$$

Вычитаем, квадраты t^2 сокращаются:

$$\vec{d} = \vec{v}_0 \Delta t + \vec{g}\,\Delta t\Big(t - \frac{\Delta t}{2}\Big),$$

$$\vec{d} = \Delta t\Big[\vec{v}_0 + \vec{g}\Big(t - \frac{\Delta t}{2}\Big)\Big] = \Delta t\ \vec{u}\Big(t - \frac{\Delta t}{2}\Big),$$

где $\vec{u}(\tau) = \vec{v}_0 + \vec{g}\tau$ — скорость камешка через время τ после броска. Вектор $\vec{d}$ зависит от t линейно: второй камешок относительно первого движется равномерно с постоянной скоростью $-\vec{g}\Delta t$.

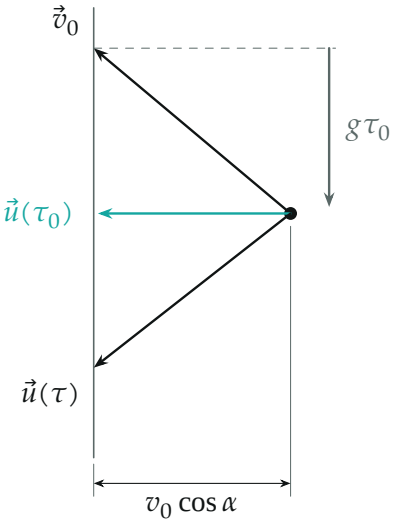


Траектория при $v_0 = 10$ м/с, $\alpha = 40°$, $\Delta t = 0{,}6$ с (рассчитана). Бирюзовые точки — камешки в момент минимума: на одной высоте, симметрично вершине. Ось x направлена в сторону броска

2. Минимум как минимум скорости. По пункту 1 $|\vec{d}| = \Delta t\, u(\tau)$, где $\tau = t - \frac{\Delta t}{2}$. Найдём, когда скорость камешка наименьшая. Проекции скорости:

$$u_x = v_0 \cos\alpha = \text{const}, \qquad u_y = v_0 \sin\alpha - g\tau.$$

Модуль $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ минимален, когда $u_y = 0$ — в верхней точке, при $\tau_0 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$; там $u_{\min} = v_0 \cos\alpha$ (горизонтальная составляющая не меняется).



Годограф скорости: концы векторов $\vec{u}(\tau) = \vec{v}_0 + \vec{g}\tau$ из одной точки лежат на вертикальной прямой. Самый короткий — горизонтальный, длиной $v_0 \cos\alpha$

3. Когда минимум достижим. Время $\tau = t - \frac{\Delta t}{2}$ меняется от $\frac{\Delta t}{2}$ (при $t = \Delta t$, броске второго) и дальше. Если $\tau_0 \geqslant \frac{\Delta t}{2}$, то есть $v_0 \sin\alpha \geqslant \frac{g\Delta t}{2}$, минимум достигается:

$$d_{\min} = v_0 \cos\alpha\, \Delta t \qquad \text{в момент} \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{\Delta t}{2}$$

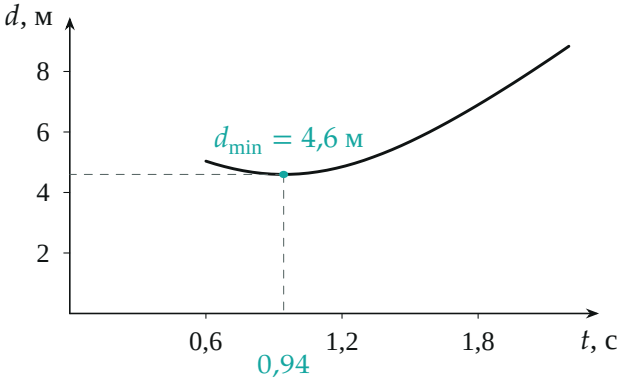
после броска первого камешка (через $\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{\Delta t}{2}$ после броска второго). В этот момент первый камешек на $\frac{\Delta t}{2}$ позже вершины, второй — на $\frac{\Delta t}{2}$ раньше: они на одной высоте, и $\vec{d}$ горизонтален.

Если же $v_0 \sin\alpha < \frac{g\Delta t}{2}$, первый камешек уже прошёл вершину к моменту броска второго, и $u(\tau)$ при $\tau \geqslant \frac{\Delta t}{2}$ только растёт. Тогда минимум

— в момент броска второго, $t = \Delta t$:

$$d_{\min} = \Delta t \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \left(v_0 \sin \alpha - \frac{g\Delta t}{2}\right)^2},$$

$$d_{\min} = \Delta t \sqrt{v_0^2 - v_0 g \Delta t \sin \alpha + \frac{g^2 \Delta t^2}{4}}.$$



Расстояние между камешками от времени ($v_0 = 10$ м/с, $\alpha = 40°$, $\Delta t = 0{,}6$ с, $g = 10$ м/с^2), начиная с броска второго: минимум $v_0 \Delta t \cos \alpha = 4{,}6$ м при $t = 0{,}94$ с

Обратите внимание: «последующее движение» начинается, когда брошены оба камешка. До этого второй камешек в точке броска, и расстояние — просто удаление первого от башни; нулевое расстояние в момент $t = 0$ ответом не является.

Проверка. Размерность: скорость × время — длина. Предел $\alpha \to 90°$ (бросок вверх): камешки на одной вертикали, $d_{\min} = 0$ — они встречаются, когда первый падает обратно, при $t = \frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}$ (если $v_0 > g\Delta t/2$); это верно: первый, падая, проходит ту же высоту, что второй, поднимаясь. Численно (python): при $v_0 = 10$ м/с, $\alpha = 40°$, $\Delta t = 0{,}6$ с перебор по времени даёт минимум 4,596 м при $t = 0{,}943$ с, формулы — 4,596 м и 0,943 с; во втором случае ($\Delta t = 1{,}6$ с) минимум 12,51 м при $t = \Delta t$, как и по формуле.

Смысл: камешки летят друг относительно друга равномерно, и ближе всего они там, где сам камешек летит медленнее всего, — у вершины параболы.

Ответ. Если $v_0 \sin\alpha \geqslant \dfrac{g\Delta t}{2}$: $d_{\min} = v_0 \Delta t \cos\alpha$ в момент $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} + \dfrac{\Delta t}{2}$ после броска первого камешка. Если $v_0 \sin\alpha < \dfrac{g\Delta t}{2}$: $d_{\min} = \Delta t \sqrt{v_0^2 - v_0 g \Delta t \sin\alpha + g^2 \Delta t^2 / 4}$ в момент броска второго камешка.