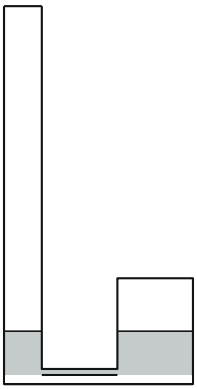
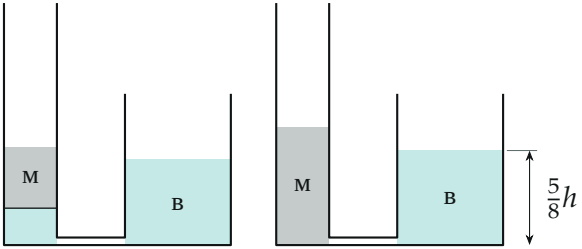
Масло в сообщающихся сосудах

Задача 2. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 2] Сообщающиеся сосуды представляют собой два вертикальных цилиндрических сосуда, соединённых внизу тонкой трубкой. Радиус узкого сосуда R, широкого $2R$. Широкий сосуд имеет высоту h, узкий — очень высокий. В сосуды налита вода так, что её уровень расположен на высоте $h/2$ от поверхности. В узкое колено аккуратно наливают масло, плотность которого составляет четыре пятых от плотности воды. Какой максимальный объём масла можно налить в сосуды? Объёмом соединяющей сосуды трубки пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Масло легче воды и остаётся сверху в узком колене. Его вес давит на воду, и вода перетекает в широкий сосуд. Когда вся вода уйдёт из узкого колена, масло пойдёт по трубке в широкий сосуд, всплывёт там над водой и будет поднимать общий уровень. Предел — широкий сосуд заполнен до края: дальше жидкость выливается. Главный закон — равенство давлений на одном уровне у дна в соединённых сосудах (гидростатика). Класс задачи — сообщающиеся сосуды с двумя жидкостями: этапы процесса и баланс давлений.

Обозначения. ρ — плотность воды, масла — $\frac{4}{5}\rho$. Площади сечений: узкого $S = \pi R^2$, широкого $4S$. H — высота столба масла в узком колене в конце.



Этап 1: масло (м) в узком колене вытесняет воду (в) в широкий сосуд. Этап 2: в узком колене воды не осталось, вся вода — в широком, слоем $\frac{5}{8}h$. Масштаб — по вычисленным уровням

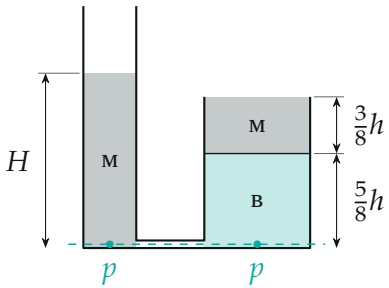
1. Куда может уйти вода. Объём воды:

$$V_в = S\frac{h}{2} + 4S\frac{h}{2} = \frac{5}{2}Sh.$$

Широкий сосуд вмещает $4Sh > \frac{5}{2}Sh$, поэтому вся вода помещается в нём, не переливаясь, слоем $\frac{5/2}{4}h = \frac{5}{8}h$. Значит, до перелива масло успеет вытеснить из узкого колена всю воду и начнёт переходить в широкий сосуд. Там оно легче воды и всплывает над ней.

2. Конечное состояние. Масла больше всего, когда широкий сосуд полон до края: снизу вода слоем $\frac{5}{8}h$, над ней масло слоем $h - \frac{5}{8}h = \frac{3}{8}h$. Объём масла в широком сосуде

$$V_1 = 4S \cdot \frac{3}{8}h = \frac{3}{2}Sh.$$



Конечное состояние (в масштабе): широкий сосуд полон, в узком — столб масла $H = \frac{37}{32}h$. Давления у дна под узким и широким коленом одинаковы

3. Высота масла в узком колене. Жидкость в трубке у дна неподвижна, поэтому давление у дна под узким и под широким коленом одно и то же (уровень один). Атмосферное давление сверху одинаково и сокращается. Гидростатическое давление столба — сумма $\rho_i g h_i$ слоёв:

$$\frac{4}{5}\rho g H = \rho g \cdot \frac{5}{8}h + \frac{4}{5}\rho g \cdot \frac{3}{8}h.$$

Делим на $\frac{4}{5}\rho g$:

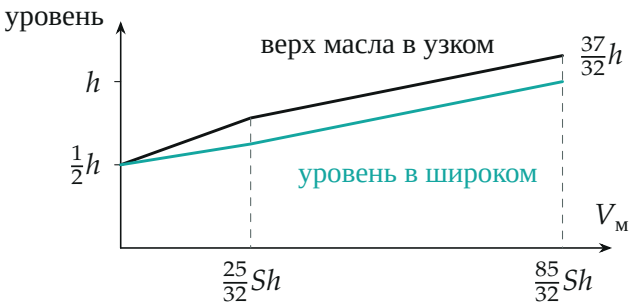
$$H = \frac{25}{32}h + \frac{12}{32}h = \frac{37}{32}h, \qquad V_2 = SH = \frac{37}{32}Sh.$$

Узкий сосуд очень высокий, столб $\frac{37}{32}h$ в нём помещается.

4. Ответ. Всё масло — в широком сосуде и в узком колене:

$$V_{\max} = V_1 + V_2 = \frac{48}{32}Sh + \frac{37}{32}Sh = \frac{85}{32}\pi R^2 h.$$

Обратите внимание: ответ — не «объём широкого сосуда минус вода» и не «пока вода не ушла из узкого колена». Масло продолжает входить и после того, как широкий сосуд наполнился бы водой по старой логике, потому что в узком колене остаётся высокий столб масла $\frac{37}{32}h$ — его объём тоже входит в ответ.



Уровни жидкости от объёма налитого масла (рассчитаны по балансу дав-

лений): излом — момент, когда из узкого колена ушла вся вода; конец — широкий сосуд полон

Проверка. Размерность: R^2h — объём. Второй способ для давления у дна широкого сосуда: вес всей жидкости в нём, делённый на площадь дна, $\dfrac{\rho g\cdot\frac{5}{2}Sh+\frac{4}{5}\rho g\cdot\frac{3}{2}Sh}{4S}=\dfrac{37}{40}\rho gh$, и $\frac{4}{5}\rho gH=\frac{37}{40}\rho gh$ даёт то же $H=\frac{37}{32}h$. Знак: $H>h$ — масло в узком колене стоит выше края широкого сосуда, как и должно быть: оно легче жидкости в широком сосуде.

Смысл: масла входит больше объёма широкого сосуда, потому что лёгкий столб в узком колене должен быть выше, чтобы уравновесить более тяжёлую смесь в широком.

Ответ. $V_{\max}=\dfrac{85}{32}\,\pi R^2h.$