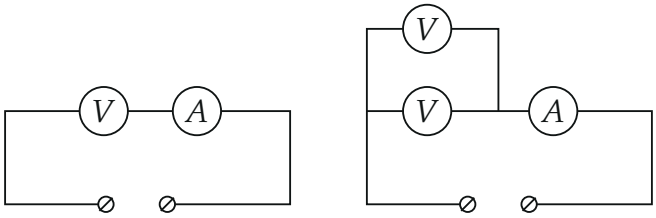
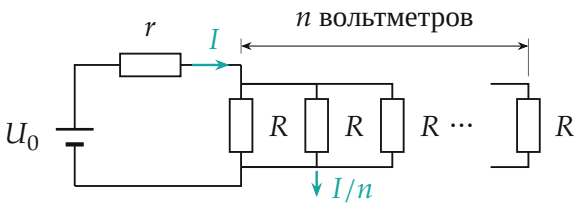
Много вольтметров вместе с амперметром

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Когда к источнику постоянного напряжения подключили последовательно соединённые амперметр и вольтметр (левый рисунок), вольтметр показал напряжение U. Когда параллельно этому вольтметру подключили ещё один такой же вольтметр (правый рисунок), вольтметры в сумме показали напряжение $\frac{12}{7}U$. Затем параллельно этим двум вольтметрам подключают ещё очень много точно таких же вольтметров. Какое напряжение они покажут в сумме? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр и амперметр — обычные резисторы: вольтметр с сопротивлением R показывает напряжение на себе, амперметр имеет своё сопротивление r. Подключая вольтметры параллельно, мы уменьшаем сопротивление их группы, ток растёт, и сумма показаний растёт. Главная идея: сумма показаний n одинаковых параллельных вольтметров равна IR — току в цепи, умноженному на сопротивление одного вольтметра. Две схемы из условия дают два уравнения на две неизвестные комбинации, а при $n \to \infty$ ток ограничивает только амперметр. Класс задачи — неидеальные приборы, закон Ома для цепи.

Обозначения. U_0 — напряжение источника, R — сопротивление вольтметра, r — амперметра, n — число параллельных вольтметров, I — ток через амперметр, Σ_n — сумма показаний.



Эквивалентная схема: вольтметры — резисторы R, амперметр — резистор r. Ток I делится поровну между n одинаковыми вольтметрами

1. Сумма показаний параллельных вольтметров. Вольтметры одинаковы и подключены к одним и тем же точкам, поэтому ток I делится между ними поровну, I/n. Вольтметр показывает напряжение на самом себе, $U_1 = \frac{I}{n}R$. Сумма показаний

$$\Sigma_n = n \cdot \frac{IR}{n} = IR.$$

2. Ток в цепи. Сопротивление группы из n параллельных вольтметров — R/n, последовательно с ней амперметр r. Закон Ома для участка цепи от зажима до зажима (источник постоянного напряжения U_0):

$$I = \frac{U_0}{R/n + r} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_n = \frac{U_0 R}{R/n + r}.$$

При $n \to \infty$ сопротивление группы стремится к нулю, ток — к U_0/r, и

$$\Sigma_\infty = \frac{U_0 R}{r}.$$

Неизвестна только эта комбинация — её и найдём из двух опытов.

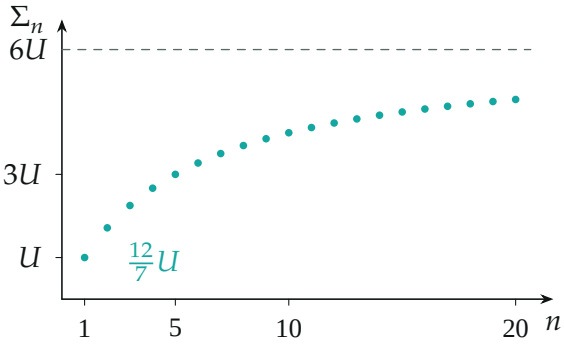
3. Два опыта. Запишем Σ_n для $n = 1$ и $n = 2$ и перевернём дроби — так неизвестные входят линейно:

$$U = \frac{U_0 R}{R + r} \;\Rightarrow\; \frac{1}{U} = \frac{1}{U_0} + \frac{r}{U_0 R};$$

$$\frac{12}{7}U = \frac{U_0 R}{R/2 + r} \;\Rightarrow\; \frac{7}{12U} = \frac{1}{2U_0} + \frac{r}{U_0 R}.$$

Умножим второе на 2 и вычтем первое — слагаемое $1/U_0$ уходит:

$$\frac{7}{6U}-\frac{1}{U}=\frac{r}{U_0R}\quad\Rightarrow\quad\frac{r}{U_0R}=\frac{1}{6U},\qquad\Sigma_\infty=\frac{U_0R}{r}=6U.$$



Сумма показаний от числа вольтметров (точки рассчитаны): $\Sigma_n=6U\dfrac{n}{n+5}$, *насыщение к* $6U$

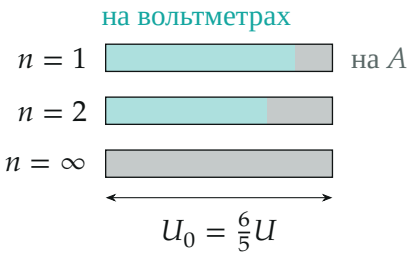
4. Все параметры (второй способ и проверка). Подставим $\frac{r}{U_0R}=\frac{1}{6U}$ в первое уравнение: $\frac{1}{U_0}=\frac{1}{U}-\frac{1}{6U}=\frac{5}{6U}$, $U_0=\frac{6}{5}U$ и $r=\frac{U_0}{6U}R=\frac{R}{5}$. Тогда

$$\Sigma_n=\frac{\frac{6}{5}U\,R}{R/n+R/5}=6U\,\frac{n}{n+5},$$

$$\Sigma_1=U,\quad\Sigma_2=\frac{12}{7}U,\quad\Sigma_\infty=6U.$$

Оба условия выполнены, предел — $6U$.

Обратите внимание: сумма показаний может быть больше напряжения источника ($6U>\frac{6}{5}U$). Противоречия нет: каждый вольтметр показывает одно и то же малое напряжение на группе, а складываем мы n одинаковых чисел.



Как делится напряжение источника U_0 между группой вольтметров и амперметром ($r = R/5$): при $n \to \infty$ всё напряжение — на амперметре, ток U_0/r

Проверка. Размерность: U_0R/r — напряжение. Предел $r \to 0$ (идеальный амперметр): тогда каждый вольтметр показывает U_0, сумма растёт без предела, и в условии было бы $\Sigma_2 = 2U$; у нас $\frac{12}{7}U < 2U$ — значит, $r > 0$, и сумма ограничена.

Смысл: сумма показаний равна току, умноженному на R, а ток ограничен сопротивлением амперметра.

Ответ. $\Sigma = \dfrac{U_0R}{r} = 6U.$