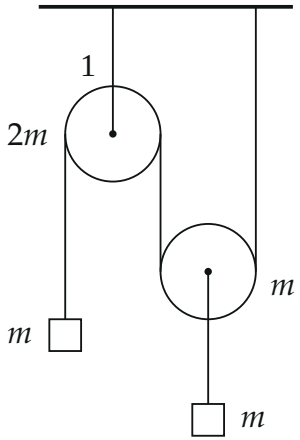
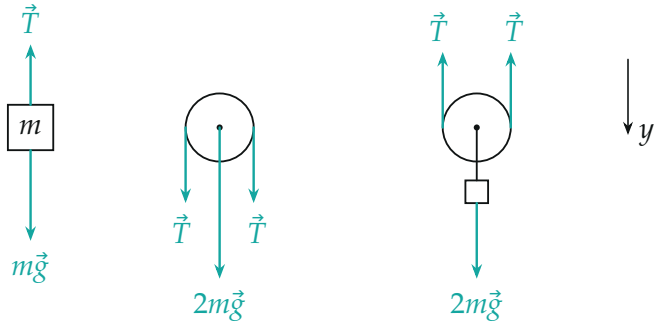
Блоки и грузы после обрыва нити

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Через блоки переброшена лёгкая нерастяжимая верёвка, к одному концу которой прикреплено тело массой m, второй конец которой прикреплён к горизонтальному потолку. Левый блок имеет массу $2m$, правый — m, причём масса блоков практически сосредоточена в их осях. Систему удерживают, а в некоторый момент времени верёвку 1 перерезают и предоставляют систему самой себе. Найти ускорения тел после этого.



▲ **Решение. Что происходит.** После обрыва верёвки 1 верхний (левый) блок массой $2m$ больше ничем не удерживается сверху: верёвка, переброшенная через него, обоими концами уходит вниз и тянет его *вниз*. Блок падает с ускорением больше g, «выдавая» верёвку вниз, и поэтому груз слева и нижний блок с грузом тоже опускаются. Блоки невесомы во вращении (масса — в осях), верёвка лёгкая, поэтому натяжение T одно на всей верёвке. Класс задачи — связанные тела на блоках: второй закон Ньютона для каждого тела плюс связь ускорений через длину верёвки.

Обозначения. Ось y — вертикально вниз, отсчёт от потолка. y_1 — левый груз, y_2 — ось верхнего блока, y_3 — ось нижнего блока (груз на ней движется вместе с ней). a_1, a_2, a_3 — проекции их ускорений на ось y. Нижний блок и груз на нём — одно тело массой $2m$.



груз верхний блок нижний блок с грузом

Силы на три тела после обрыва верёвки 1. На верхний блок оба куска верёвки тянут вниз, на нижний — оба вверх

1. Второй закон Ньютона. Запишем его для каждого тела в проекции на ось y (вниз):

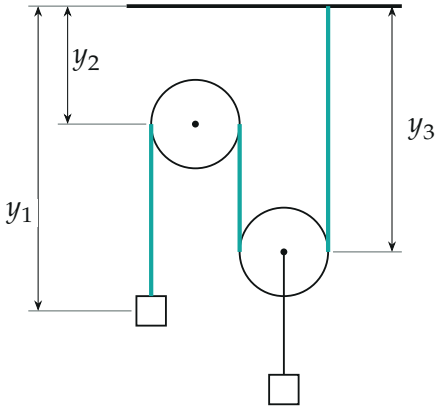
$$ma_1 = mg - T, \qquad 2ma_2 = 2mg + 2T, \qquad 2ma_3 = 2mg - 2T.$$

Первое и третье уравнения после деления совпадают: $a_3 = a_1 = g - \frac{T}{m}$. Верхний блок: $a_2 = g + \frac{T}{m}$ — больше g, натяжение помогает ему падать.

2. Связь ускорений через длину верёвки. Длина верёвки — сумма длин вертикальных кусков (дуги на блоках не меняются): от груза вверх до верхнего блока $y_1 - y_2$, от верхнего блока вниз до нижнего $y_3 - y_2$, от нижнего блока вверх до потолка y_3:

$$(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2) + y_3 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad a_1 + 2a_3 = 2a_2.$$

С $a_3 = a_1$ получаем $a_2 = \frac{3}{2}a_1$: верхний блок, опускаясь на Δ, освобождает 2Δ верёвки, а грузу и нижнему блоку при одинаковом смещении δ нужно 3δ.



Координаты тел от потолка. Бирюзой — три вертикальных куска верёвки, их длины $y_1 - y_2$, $y_3 - y_2$ и y_3

3. Решаем систему. Подставим $a_1 = g - \frac{T}{m}$ и $a_2 = g + \frac{T}{m}$ в $2a_2 = 3a_1$:

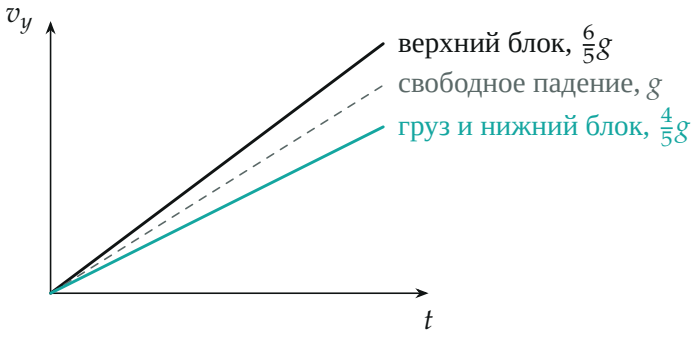
$$2g + \frac{2T}{m} = 3g - \frac{3T}{m} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{5}.$$

Отсюда

$$a_1 = a_3 = g - \frac{g}{5} = \frac{4}{5}g, \qquad a_2 = g + \frac{g}{5} = \frac{6}{5}g.$$

Все ускорения положительны — все тела движутся вниз; натяжение $T > 0$, верёвка натянута, предположение о натянутой верёвке выполнено.

Обратите внимание: верхний блок падает с ускорением больше g. Противоречия нет: на него действует не только тяжесть, но и верёвка, и тянет она его вниз — оба её конца уходят от блока вниз.



Скорости тел от времени после обрыва: наклон прямой — ускорение. Верхний блок обгоняет свободное падение, остальные отстают

Проверка. Размерность: ускорения выражены через g. Связь: $2a_2 = \frac{12}{5}g = 3a_1$ — верно. Второй способ — закон сохранения энергии: при смещении груза на δ нижний блок с грузом опускаются на δ, верхний блок — на $\frac{3}{2}\delta$. Убыль потенциальной энергии $mg\delta + 2mg\delta + 2mg\cdot\frac{3}{2}\delta = 6mg\delta$. Кинетическая энергия $\frac{1}{2}(m+2m)v^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m(\frac{3}{2}v)^2 = \frac{15}{4}mv^2$. Из $\frac{15}{4}mv^2 = 6mg\delta$: $v^2 = 2\cdot\frac{4}{5}g\,\delta$, то есть $a_1 = \frac{4}{5}g$ — то же.

Смысл: верёвка перераспределяет тяжесть — верхний блок, падая быстрее всех, «отдаёт» верёвку, и благодаря этому остальные тела падают медленнее g.

Ответ. $a_1 = a_3 = \dfrac{4}{5}g$ (левый груз и нижний блок с грузом, вниз); $a_2 = \dfrac{6}{5}g$ (верхний блок, вниз).