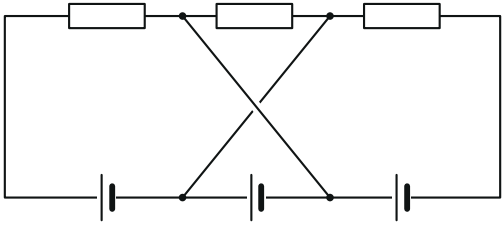
Три источника и три резистора

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 1] Электрическая цепь, схема которой показана на рисунке, содержит три одинаковых источника с ЭДС $\varepsilon = 1{,}5$ В с нулевым внутренним сопротивлением и три резистора, два из которых имеют сопротивление $R = 100$ Ом, третий — $2R$. Найти ток через средний источник. Сопротивления проводов пренебрежимо малы.

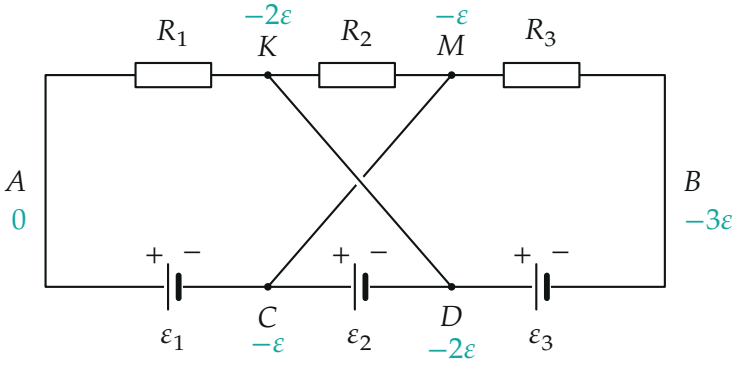


▲ **Решение.** **Что происходит.** Источники идеальные (внутреннего сопротивления нет), а провода без сопротивления соединяют узлы, разнесённые по схеме. Поэтому потенциал каждого узла задают только ЭДС источников: обходим нижний провод от левого края, и каждый источник меняет потенциал ровно на ε. Напряжение на каждом резисторе получается сразу, без системы уравнений Кирхгофа, а ток через средний источник — из закона сохранения заряда в узлах. Класс задачи: цепь с идеальными источниками, метод потенциалов узлов. Какой из трёх резисторов имеет сопротивление $2R$, по рисунку не видно, поэтому разберём оба случая: $2R$ в середине и $2R$ с краю.

Обозначения. Узлы и потенциалы — на рисунке ниже. Длинная тонкая пластина источника — его плюс, короткая толстая — минус; на схеме у всех трёх источников плюс слева. R_1, R_2, R_3 — сопротивления левого, среднего и правого резисторов; I_1, I_2, I_3 — токи через них, I — ток через средний источник.

1. Какие точки соединены проводами. Левый вертикальный провод соединяет левый конец резистора R_1 с левым выводом источника ε_1 — это один узел A. Правый провод так же делает одним узлом B правый

конец R_3 и правый вывод ε_3. Косые провода идут крест-накрест и в середине не соединены (на схеме — обход): верхний узел K между R_1 и R_2 соединён с нижним узлом D между ε_2 и ε_3, а верхний узел M между R_2 и R_3 — с нижним узлом C между ε_1 и ε_2. Провод без сопротивления не меняет потенциал: $\varphi_K = \varphi_D$, $\varphi_M = \varphi_C$.



Узлы схемы и их потенциалы (бирюзой); потенциал узла A принят за нуль

2. Потенциалы узлов. Примем $\varphi_A = 0$. У идеального источника напряжение между выводами равно ЭДС при любом токе, а плюс (длинная пластина) у каждого источника слева. Идём по нижнему проводу слева направо — от плюса к минусу каждого источника, и потенциал каждый раз падает на ε:

$$\varphi_C = -\varepsilon, \qquad \varphi_D = -2\varepsilon, \qquad \varphi_B = -3\varepsilon.$$

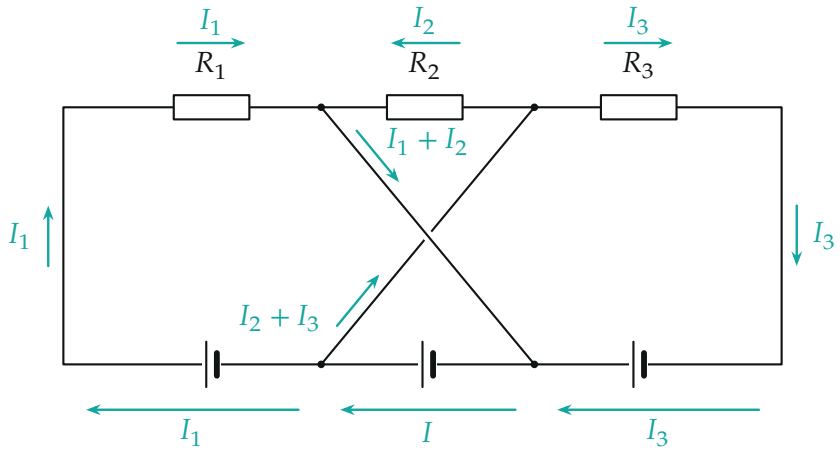
По проводам крест-накрест: $\varphi_K = \varphi_D = -2\varepsilon$, $\varphi_M = \varphi_C = -\varepsilon$.

3. Напряжения и токи резисторов (закон Ома для участка цепи). Ток через резистор течёт от большего потенциала к меньшему, и его

величина равна напряжению, делённому на сопротивление:

$$R_1: \quad \varphi_A - \varphi_K = 2\varepsilon, \quad I_1 = \frac{2\varepsilon}{R_1} \text{ (от } A \text{ к } K\text{, вправо)},$$
$$R_2: \quad \varphi_M - \varphi_K = \varepsilon, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} \text{ (от } M \text{ к } K\text{, влево)},$$
$$R_3: \quad \varphi_M - \varphi_B = 2\varepsilon, \quad I_3 = \frac{2\varepsilon}{R_3} \text{ (от } M \text{ к } B\text{, вправо)}.$$

Знаки разные: через средний резистор ток идёт навстречу двум крайним.



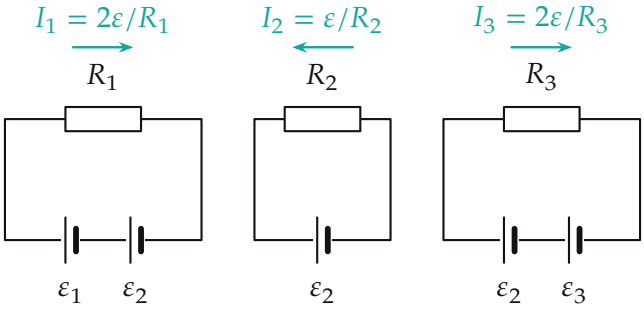
Токи в резисторах, проводах и источниках

4. Ток через средний источник (закон сохранения заряда в узлах). В постоянном режиме заряд в узлах не копится: сколько тока втекает в узел, столько и вытекает. Узел K: в него втекают I_1 (через R_1) и I_2 (через R_2), значит, по проводу K–D вниз уходит $I_1 + I_2$. Узел B: ток I_3 из R_3 идёт вниз по правому проводу и через источник ε_3 приходит в узел D. В узле D сходятся $I_1 + I_2$ и I_3, а уйти они могут только через средний источник:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{2\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{2\varepsilon}{R_3}.$$

Сверка по узлу C: в него приходит I, по проводу C–M вверх уходит I_2+I_3 (столько вытекает из узла M через R_2 и R_3), а остаток I_1 идёт через ε_1 к узлу A и снова в R_1. Всё сходится.

То же другим взглядом. Каждый резистор подключён прямо к выводам одной или двух последовательных батарей: R_1 — между A и D, то есть к $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$; R_2 — между C и D, к одному ε_2; R_3 — между C и B, к $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Получаются три независимых контура, и средний источник входит во все три, поэтому его ток — сумма токов резисторов.



Схема, распутанная на три контура: средний источник ε_2 общий для всех

5. Где стоит резистор $2R$.

Случай 1: $2R$ *в середине* ($R_1 = R_3 = R$, $R_2 = 2R$):

$$I = \frac{2\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon}{2R} + \frac{2\varepsilon}{R} = \frac{9\varepsilon}{2R} = \frac{9 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 100}\ \text{А} \approx 0{,}068\ \text{А}.$$

Случай 2: $2R$ *с краю* (например, $R_1 = 2R$, $R_2 = R_3 = R$; для $R_3 = 2R$ — то же по симметрии):

$$I = \frac{2\varepsilon}{2R} + \frac{\varepsilon}{R} + \frac{2\varepsilon}{R} = \frac{4\varepsilon}{R} = \frac{4 \cdot 1{,}5}{100}\ \text{А} = 0{,}06\ \text{А}.$$

Обратите внимание: провода крест-накрест в середине не соединены. Если считать их пересечение узлом, все четыре узла K, M, C, D сольются, и источник ε_2 окажется замкнут накоротко — ток бесконечный. Задача имеет смысл только при обходе.

У организаторов в ответе те же формулы $\frac{9\varepsilon}{2R}$ и $\frac{4\varepsilon}{R}$, но числа 0,135 А и 0,12 А — вдвое больше, чем дают эти формулы при $\varepsilon = 1{,}5$ В и $R = 100$ Ом.

Проверка. Размерность: $[\varepsilon/R] = \text{В}/\text{Ом} = \text{А}$. Мощность: источники отдают $\varepsilon \cdot (\text{ток каждого})$, а резисторы потребляют $\sum U_i I_i$. В случае 1 токи источников $I_1 = 0{,}03$ А, $I = 0{,}0675$ А, $I_3 = 0{,}03$ А, мощность источников $1{,}5 \cdot (0{,}03 + 0{,}0675 + 0{,}03) = 0{,}191$ Вт; резисторы: $3 \cdot 0{,}03 + 1{,}5 \cdot 0{,}0075 + 3 \cdot 0{,}03 = 0{,}191$ Вт. Совпадает.

Смысл: при идеальных источниках напряжение на каждом резисторе задано схемой подключения, а не соседними резисторами; средний источник питает все три резистора разом, поэтому через него течёт самый большой ток.

Ответ. $I = \frac{2\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{2\varepsilon}{R_3}$: если $2R$ — средний резистор, $I = \frac{9\varepsilon}{2R} \approx 0{,}068$ А; если $2R$ — крайний, $I = \frac{4\varepsilon}{R} = 0{,}06$ А.