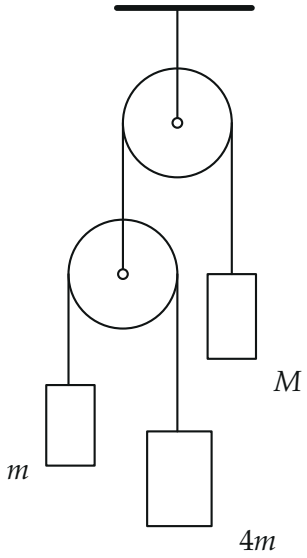
Три груза и два блока

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Имеется система трёх грузов и двух блоков, показанная на рисунке. Блоки и нити в системе невесомы, нити нерастяжимы. Массы двух нижних тел равны m и $4m$. При какой массе третьего тела M одно из тел может находиться в покое?

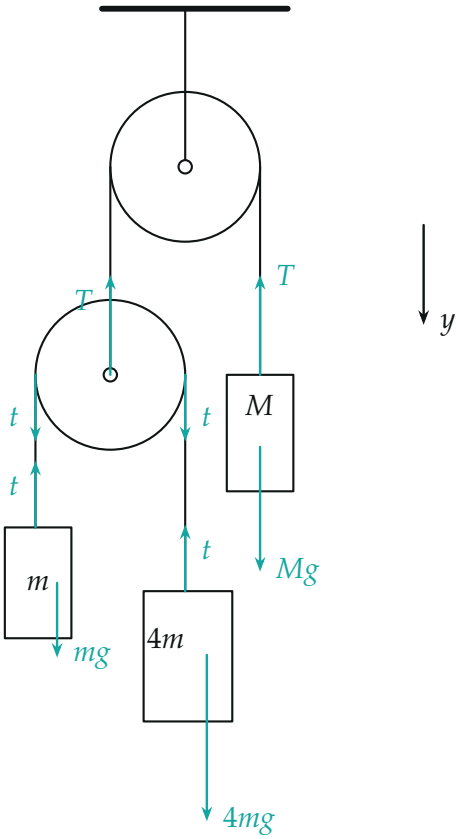


▲ **Решение. Что происходит.** Через неподвижный верхний блок перекинута нить: на одном её конце груз M, на другом — подвижный нижний блок. Через нижний блок перекинута вторая нить с грузами m и $4m$. Тело покоится, если сумма сил на него равна нулю, но этого мало: его покой должен ещё согласовываться с движением остальных тел через нерастяжимые нити. Поэтому пишем второй закон Ньютона для каждого тела, связь натяжений (через невесомый блок) и связь ускорений (через длины нитей), а затем по очереди требуем покоя каждого из трёх тел. Класс задачи: связанные тела, подвижный блок.

Обозначения. Ось y — вертикально вниз; a_M, a_B, a_1, a_4 — проекции ускорений груза M, нижнего блока, грузов m и $4m$ на эту ось. T — натяжение верхней нити, t — нижней.

1. Связь натяжений. Нижний блок невесомый, поэтому сумма сил на него равна нулю при любом его ускорении (иначе $0 \cdot a \neq F$). Вверх его тянет верхняя нить с силой T, вниз — две ветви нижней нити по t:

$$T = 2t.$$



Силы на грузы и на нижний блок; ось y — вниз

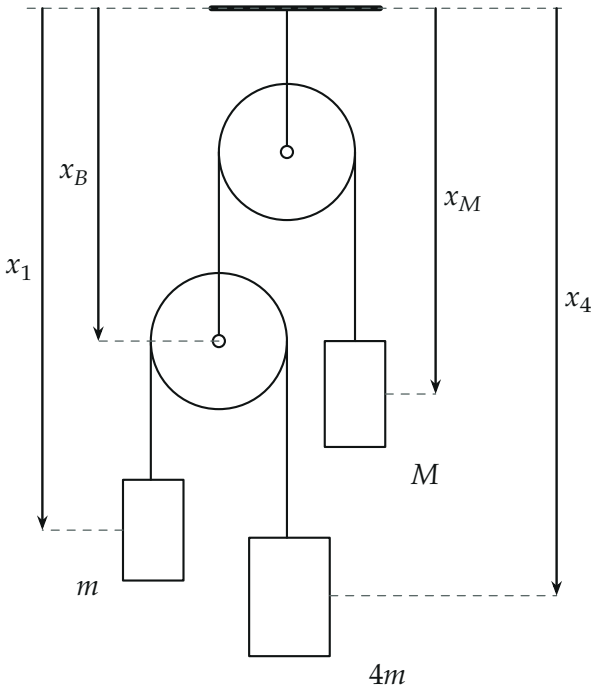
2. Второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на ось y:

$$Ma_M = Mg - 2t, \qquad ma_1 = mg - t, \qquad 4ma_4 = 4mg - t.$$

3. Связь ускорений. Отсчитываем координаты тел вниз от потолка. Длина верхней нити $x_M + x_B + \text{const}$ не меняется, значит, $a_M = -a_B$:

блок опускается ровно настолько, насколько поднимается груз M. Длина нижней нити $(x_1 - x_B) + (x_4 - x_B) + \text{const}$ тоже постоянна, поэтому

$$a_1 + a_4 = 2a_B = -2a_M.$$



Координаты тел, отсчитанные от потолка: длины нитей $x_M + x_B$ и $(x_1 - x_B) + (x_4 - x_B)$ постоянны

4. Покоится груз M**.** Тогда $a_M = 0$, и по второму закону $2t = Mg$, $t = \dfrac{Mg}{2}$. Блок тоже стоит ($a_B = -a_M = 0$), поэтому грузы m и $4m$ движутся навстречу с равными по модулю ускорениями: $a_1 = -a_4$. Из уравнений для грузов:

$$g - \frac{t}{m} = -\left(g - \frac{t}{4m}\right) \quad \Rightarrow \quad 2g = \frac{5t}{4m} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{8}{5}mg,$$

и из закона для груза M

$$M = \frac{2t}{g} = \frac{16}{5}\,m.$$

Груз m при этом поднимается с ускорением $\frac{3}{5}g$, груз $4m$ опускается с таким же ускорением.

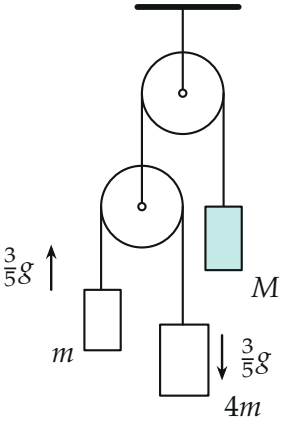
5. Покоится груз m. Тогда $a_1 = 0$ и $t = mg$. Груз $4m$: $a_4 = g - \frac{mg}{4m} = \frac{3}{4}g$ (вниз). Из связи $a_M = -\frac{a_1 + a_4}{2} = -\frac{3}{8}g$: груз M поднимается. Второй закон для M:

$$-\frac{3}{8}Mg = Mg - 2mg \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{8}M = 2m \quad \Rightarrow \quad M = \frac{16}{11}\,m.$$

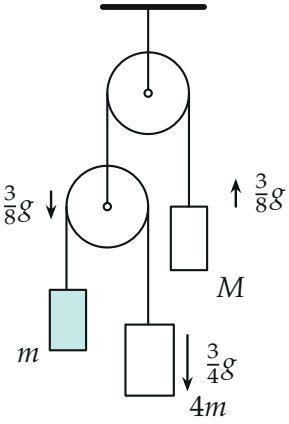
6. Покоится груз $4m$. Тогда $a_4 = 0$, $t = 4mg$, и груз m: $a_1 = g - 4g = -3g$ (вверх). Из связи $a_M = -\frac{a_1}{2} = \frac{3}{2}g$, а второй закон для M:

$$\frac{3}{2}Mg = Mg - 8mg \quad \Rightarrow \quad M = -16m < 0.$$

Отрицательной массы не бывает: груз $4m$ покоиться не может.



покоится M



покоится m

Два возможных случая: покоящийся груз закрашен, стрелки — ускорения остальных тел

Обратите внимание: «покой» одного тела не значит равновесие всей системы — остальные тела при этом движутся с ускорением. Поэтому натяжения нельзя брать из равновесия всей системы: верхняя нить держит не вес $5mg$ нижних грузов, а $T = 2t$, где t зависит от их ускорений.

Проверка вторым способом. Решим систему пунктов 1–3 при любом M (python, sympy):

$$a_4 = g\,\frac{M+16m}{5M+16m} > 0, \qquad a_M = g\,\frac{5M-16m}{5M+16m}, \qquad a_1 = g\,\frac{16m-11M}{5M+16m}.$$

Отсюда сразу: $a_M = 0$ при $M = \frac{16}{5}m$, $a_1 = 0$ при $M = \frac{16}{11}m$, а a_4 положительно при любой массе $M > 0$ — груз $4m$ всегда опускается. Размерность: M и m — массы, отношения безразмерны. Предел: при $M \to \infty$ $a_M \to g$ (груз M падает свободно, блок взлетает) и $a_4 \to \frac{g}{5}$, $a_1 \to -\frac{11}{5}g$ — как в системе грузов на блоке, который поднимают с ускорением g.

Смысл: лёгкое тело m может висеть неподвижно, если блок под ним опускается как раз так, чтобы скомпенсировать его подъём относительно блока; для тяжёлого $4m$ это потребовало бы отрицательной массы противовеса.

Ответ. Груз M покоится при $M = \dfrac{16}{5}\,m$; груз m покоится при $M = \dfrac{16}{11}\,m$; груз $4m$ покоиться не может ни при какой массе M.