Процесс с постоянной теплоёмкостью

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 4] С некоторым количеством одноатомного идеального газа проводят процесс, в котором его теплоёмкость остаётся постоянной, а газ совершает работу A ($A > 0$). Затем с этим же газом проводят изохорический процесс, в котором к нему подводят количество теплоты $Q = \frac{3}{4}A$, а его температура возвращается к первоначальному значению. Определить молярную теплоёмкость газа в первом процессе. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) известна. Получает или отдаёт газ энергию в первом процессе в результате теплообмена?

▲ **Решение. Что происходит.** Газ проходит два процесса и возвращается к исходной температуре. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, поэтому её изменения в двух процессах равны по модулю и противоположны по знаку. Во втором процессе (изохора) работы нет, и вся подведённая теплота Q идёт во внутреннюю энергию — отсюда находим изменение температуры в первом процессе. Дальше первое начало термодинамики для первого процесса даёт его теплоту, а теплоёмкость по определению — теплота на моль и на кельвин. Класс задачи: теплоёмкость процесса из первого начала.

Обозначения. ν — количество газа; состояние 1 — начальное (температура T_1), 2 — после первого процесса (T_2), 3 — после изохоры (снова T_1). C — молярная теплоёмкость первого процесса, $C_V = \frac{3}{2}R$ — молярная теплоёмкость одноатомного газа при постоянном объёме. Q_1 — теплота, полученная газом в процессе $1 \to 2$.

1. Изохора $2 \to 3$ (первое начало термодинамики). Объём не меняется, работа газа равна нулю, поэтому $Q = \Delta U_2$:

$$Q = \frac{3}{2}\nu R\,(T_1 - T_2) = \frac{3}{4}A \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{A}{2\nu R} > 0.$$

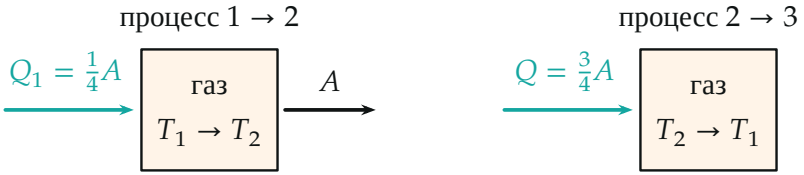
Теплоту газу подводят, и он нагревается от T_2 до T_1; значит, в первом процессе газ *охладился*: $T_2 < T_1$.

2. Процесс $1 \to 2$ (первое начало термодинамики). Газ совершил

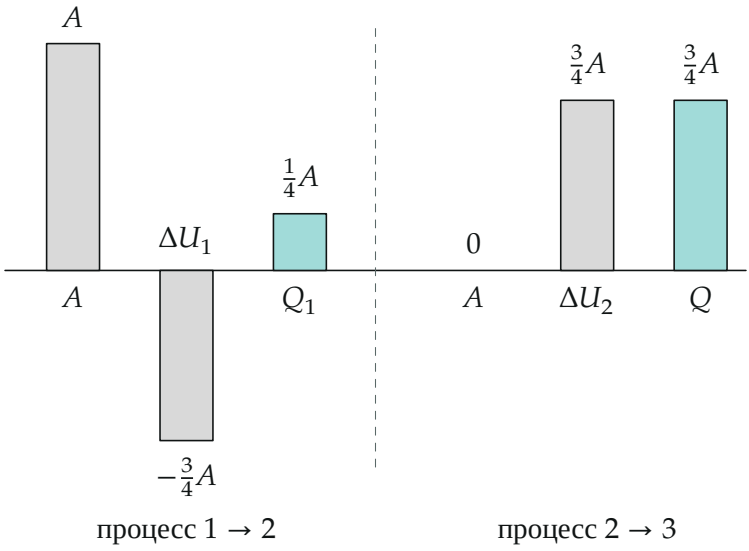
работу A, а его внутренняя энергия изменилась на $\Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = -Q = -\frac{3}{4}A$ (температура вернулась, поэтому $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$). Теплота, полученная газом:

$$Q_1 = \Delta U_1 + A = -\frac{3}{4}A + A = \frac{1}{4}A > 0.$$

Газ *получает* теплоту, хотя охлаждается: работы он совершает больше, чем получает тепла, и недостачу покрывает из внутренней энергии.



Обмен энергией в двух процессах: стрелка в газ — полученная теплота, стрелка из газа — совершённая работа



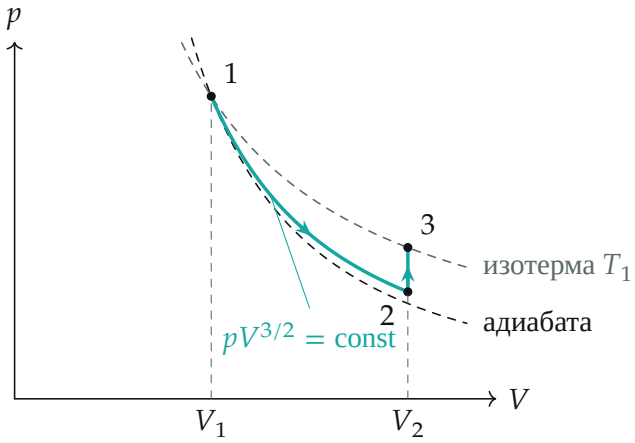
Баланс энергии $Q = \Delta U + A$ в единицах A: слева процесс $1 \to 2$, справа изохора $2 \to 3$

3. Теплоёмкость (определение молярной теплоёмкости). Теплоёмкость процесса постоянна, поэтому $Q_1 = C\nu\,(T_2 - T_1)$:

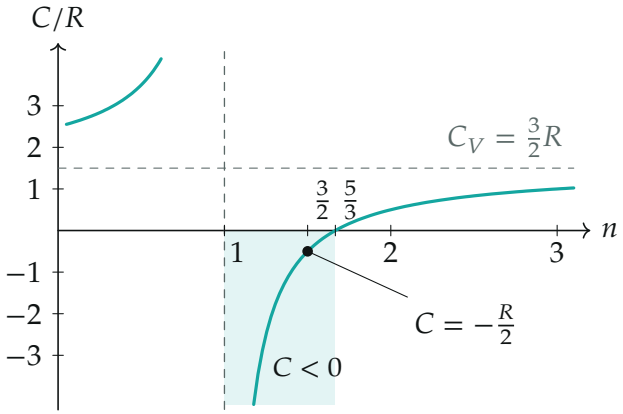
$$C = \frac{Q_1}{\nu\,(T_2 - T_1)} = \frac{A/4}{-A/(2R)} = -\frac{R}{2} \approx -4{,}16 \text{ Дж/(моль·К)}.$$

То же в общем виде: $C = C_V\dfrac{Q-A}{Q} = \dfrac{3}{2}R\cdot\dfrac{Q-A}{Q}$; при $Q = \frac{3}{4}A$ получается $-\dfrac{R}{2}$. Знак минус означает, что газ получает тепло ($Q_1 > 0$), а температура падает ($\Delta T < 0$).

4. Какой это процесс на графике. Процесс с постоянной теплоёмкостью — политропа $pV^n = \text{const}$, у неё $C = C_V - \dfrac{R}{n-1}$. Из $-\dfrac{R}{2} = \dfrac{3}{2}R - \dfrac{R}{n-1}$ находим $n = \dfrac{3}{2}$: процесс $pV^{3/2} = \text{const}$. Его показатель лежит между изотермой ($n = 1$) и адиабатой ($n = \frac{5}{3}$), и как раз для таких политроп теплоёмкость отрицательна.



Процессы на диаграмме pV: $1 \to 2$ по политропе $pV^{3/2} = \text{const}$ (бирюзой) между изотермой и адиабатой, затем изохора $2 \to 3$ до изотермы T_1



Молярная теплоёмкость политропы $C = C_V - \dfrac{R}{n-1}$: отрицательна при $1 < n < \frac{5}{3}$; точка — наш процесс

Обратите внимание: «охлаждается» не значит «отдаёт тепло». Знак теплоты в первом процессе определяется не изменением температуры, а первым началом: $Q_1 = \Delta U_1 + A$, и при большой работе он положителен.

Проверка. Размерность: C выражена через R — Дж/(моль·К). Второй способ, через политропу: при $n = \frac{3}{2}$ работа $A = \dfrac{\nu R(T_1 - T_2)}{n-1} = 2\nu R(T_1 - T_2)$, а теплота изохоры $Q = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{3}{4}A$ — ровно как в условии. Предел: если бы $Q = A$, то $\Delta U_1 = -A$, $Q_1 = 0$ — адиабата, и формула $C = \frac{3}{2}R\frac{Q-A}{Q}$ даёт $C = 0$, как и должно быть.

Смысл: газ в первом процессе расширяется, получая тепло, но работы совершает втрое больше полученной теплоты, поэтому остывает — это и есть отрицательная теплоёмкость.

Ответ. $C = -\dfrac{R}{2} \approx -4{,}16$ Дж/(моль·К); в первом процессе газ получает энергию в результате теплообмена ($Q_1 = \frac{1}{4}A > 0$).