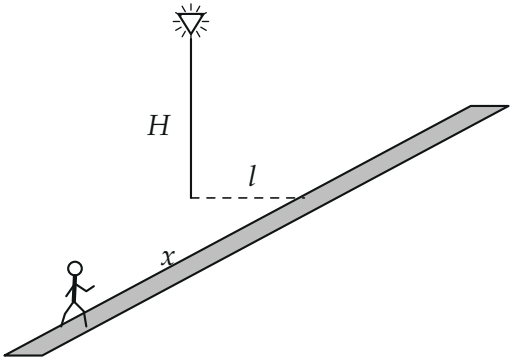
Тень от головы мальчика

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Мальчик, рост которого h, идёт с постоянной скоростью v по прямой дорожке, проходящей на расстоянии l от фонаря высотой H (см. рисунок). Найти скорость тени на земле от головы мальчика в тот момент времени, когда расстояние от мальчика до точки дорожки, находящейся на минимальном расстоянии от основания фонаря, равно $x = 2l$.



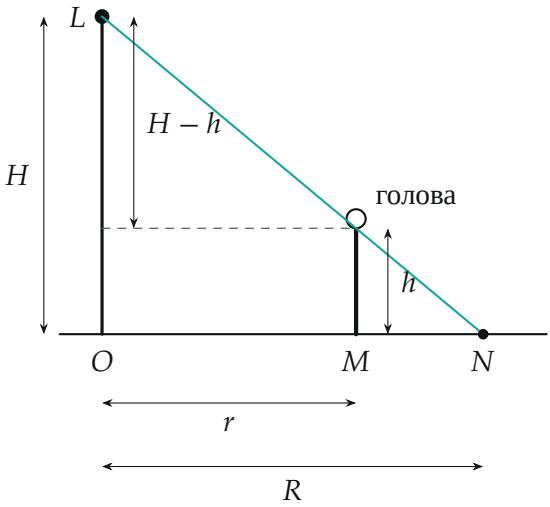
▲ **Решение. Что происходит.** Свет от фонаря идёт прямолинейно: тень головы лежит там, где луч из лампы через голову мальчика встречает землю. Лампа, голова и тень лежат в одной вертикальной плоскости, проходящей через фонарь и мальчика. В этой плоскости подобие треугольников даёт: расстояние от фонаря до тени в одно и то же число раз больше расстояния до мальчика. Значит, тень на земле — это положение мальчика, растянутое от основания фонаря в $\dfrac{H}{H-h}$ раз, и она движется так же, только в $\dfrac{H}{H-h}$ раз быстрее. Класс задачи: прямолинейное распространение света и подобие, кинематика тени.

Обозначения. O — основание фонаря, L — лампа, M — точка, где стоит мальчик, N — тень головы, P — ближайшая к фонарю точка дорожки, $r = OM$, $R = ON$ — расстояния по земле.

1. Вертикальная плоскость через фонарь и мальчика (подобие треугольников). Луч LN проходит через голову. Треугольник «лампа

— голова» над уровнем головы подобен треугольнику LON: у первого катеты $H - h$ (по вертикали) и r (по горизонтали), у второго — H и R:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{H}{H-h}\, r.$$

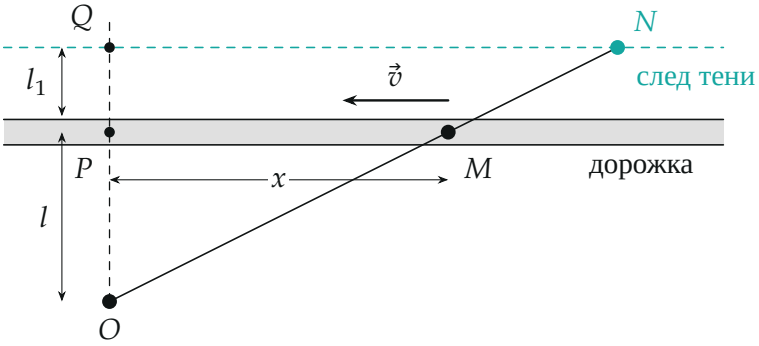


Вертикальный разрез через фонарь и мальчика: луч из лампы через голову попадает в точку N

2. Вид сверху: где лежит тень. Точка N лежит на продолжении отрезка OM, и $ON = \dfrac{H}{H-h}\, OM$. Это *гомотетия* с центром O и коэффициентом $k = \dfrac{H}{H-h}$: каждая точка дорожки переходит в точку, в k раз дальше от O по тому же лучу. Прямая дорожка (на расстоянии l от O) переходит в прямую, параллельную ей, на расстоянии kl от O. Значит, тень идёт по прямой, параллельной дорожке, на расстоянии

$$l_1 = kl - l = \frac{lh}{H-h}$$

за дорожкой.

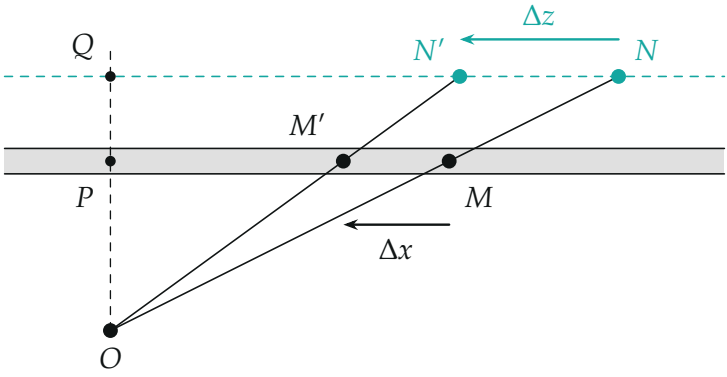


Вид сверху: тень N лежит на луче OM в $k = \frac{H}{H-h}$ раз дальше от O и бежит по прямой, параллельной дорожке

3. Скорость тени. Мальчик за малое время Δt сместился вдоль дорожки на $\Delta x = v\,\Delta t$ из M в M'. Тень перешла из N в N'; треугольники OMM' и ONN' подобны с коэффициентом k (общий угол при O, стороны MM' и NN' параллельны). Поэтому

$$\Delta z = NN' = k\,\Delta x = \frac{H}{H-h}\,v\,\Delta t, \qquad v_{\text{тени}} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{Hv}{H-h}.$$

Тень движется параллельно мальчику, в ту же сторону.



За время Δt мальчик проходит Δx, тень — $\Delta z = k\,\Delta x$: треугольники OMM' и ONN' подобны

Обратите внимание: ответ не зависит от расстояния $x = 2l$ и от l. Число x в условии лишнее: тень бежит по прямой с постоянной скоростью, в любой момент одинаковой. Скорость тени головы не равна скорости конца тени по направлению «от фонаря» — тень всё время движется вдоль дорожки, а не по лучу OM.

Проверка. Размерность: $\dfrac{H}{H-h}$ безразмерно, ответ в м/с. Предельные случаи: очень высокий фонарь ($H \gg h$) — лучи почти вертикальны, тень под мальчиком и бежит с его скоростью v; фонарь чуть выше мальчика ($H \to h$) — лучи почти горизонтальны, тень убегает далеко и её скорость неограниченно растёт. Второй способ, векторно: $\vec{R} = k\vec{r}$ при постоянном k, поэтому $\vec{v}_{\text{тени}} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = k\vec{v}$.

Смысл: тень — увеличенная в $\dfrac{H}{H-h}$ раз копия движения мальчика с центром в основании фонаря, и все её скорости увеличены в столько же раз.

Ответ. $v_{\text{тени}} = \dfrac{Hv}{H-h}$; тень движется параллельно дорожке с постоянной скоростью, так что при $x = 2l$ (и при любом другом x) ответ один и тот же.