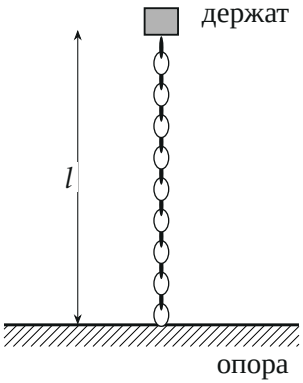
Падающая цепочка

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Цепочку с мелкими звеньями длиной l удерживают за верхний конец над горизонтальной опорой, которой она касается своим нижним концом. Цепочку отпускают, и она начинает падать на опору. Считая, что скорость упавших звеньев мгновенно гасится до нуля из-за абсолютно неупругого удара и упавшие звенья цепочки никак не влияют на движение остальных звеньев, найти, через какое время после начала движения цепочки кинетическая энергия ещё не упавших звеньев будет максимальной? Чему равна эта максимальная кинетическая энергия?

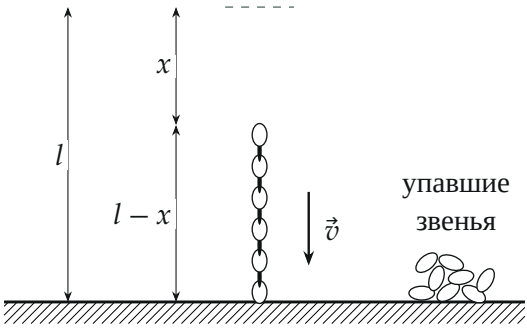


Поясняющий рисунок: цепочка в момент, когда её отпускают

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на свободное падение и на поиск максимума функции. На звенья действует только сила тяжести, поэтому каждое звено падает с ускорением g, пока не ударится об опору и не остановится. Все ещё не упавшие звенья летят с одной скоростью, а их число убывает: нижние звенья одно за другим «выключаются» на опоре. Кинетическая энергия K ещё не упавшей части зависит от двух вещей, и они тянут в разные стороны: скорость растёт, масса падает. Сначала скорость растёт быстрее, чем уходит масса, и K растёт. В конце остаётся мало звеньев, и K снова падает до нуля. Значит, где-то между этими моментами у K есть максимум.

Полная механическая энергия цепочки не сохраняется: при ударах она уходит в тепло. Поэтому закон сохранения энергии для всей цепочки здесь не нужен, а энергию считаем только у ещё не упавшей части, и именно по её скорости и массе.

Обозначения. m — масса всей цепочки (в условии она не названа, ответ выразим через неё); x — длина уже упавшей на опору части; m_1 и v — масса и скорость ещё не упавших звеньев; K — их кинетическая энергия; t — время, прошедшее с момента, когда цепочку отпустили.



Цепочка через время t: упавшая часть длиной x лежит на опоре, остальные звенья длиной $l - x$ летят вниз с общей скоростью v

1. Скорость ещё не упавших звеньев. Пока звенья летят свободно, ни одно из них не тянет и не толкает соседнее: на каждое действует лишь сила тяжести, нить натянута нулевой силой. Поэтому все неупавшие звенья имеют одну скорость и цепочка не растягивается. Нижний конец этой части всё время у опоры (её «съедает» опора), а верхний конец на высоте $l - x$ над опорой. Значит, верхний конец опустился на $l - (l - x) = x$, то есть ровно на длину упавшей части (рис. 2). Верхнее звено падает без начальной скорости на путь x, а все остальные звенья летят с той же скоростью:

$$v^2 = 2gx.$$

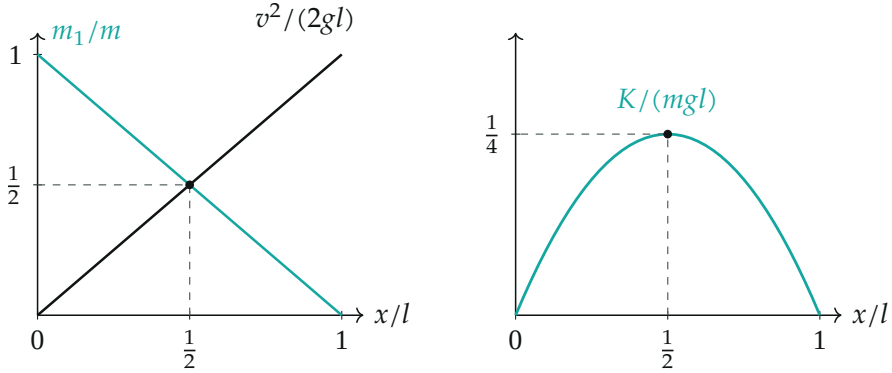
2. Масса ещё не упавших звеньев. Цепочка однородная, на единицу длины приходится масса m/l. Не упала часть длиной $l - x$:

$$m_1 = \frac{m}{l}(l - x).$$

3. Кинетическая энергия как функция x. Энергия неупавшей части:

$$K = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m}{2l}(l-x)\cdot 2gx = \frac{mg}{l}x(l-x).$$

Масса m_1 линейно убывает с ростом x, квадрат скорости v^2 линейно растёт, а K — их произведение (рис. 3). У такой функции нулевые значения при $x = 0$ (цепочка ещё не успела набрать скорость) и при $x = l$ (неупавших звеньев не осталось), между ними максимум.



Слева: масса не упавших звеньев убывает, квадрат их скорости растёт. Справа: энергия — их произведение, у параболы максимум при $x = l/2$

4. Положение максимума. Обозначим $f(x) = x(l-x)$. Первый способ: производная обращается в нуль,

$$\frac{dK}{dx} = \frac{mg}{l}(l-2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{2}.$$

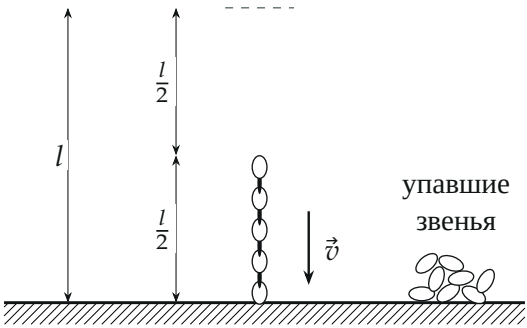
Вторая производная $-2mg/l < 0$, значит, это максимум. Второй способ, без производной: выделим полный квадрат,

$$x(l-x) = \frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \le \frac{l^2}{4},$$

равенство достигается только при $x = l/2$. Результаты совпали: максимум энергии наступает, когда упала ровно половина цепочки.

5. Время. Верхний конец падает свободно, и за время t он проходит путь $x = gt^2/2$ (шаг 1: путь верха равен длине упавшей части). Подставим $x = l/2$:

$$\frac{gt^2}{2} = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Момент максимума: упала ровно половина длины, летит вторая половина

6. Максимальная энергия. При $x = l/2$ скорость $v^2 = gl$, масса $m_1 = m/2$:

$$K_{\max} = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{(m/2)\, gl}{2} = \frac{mgl}{4}.$$

Подстановка $x = l/2$ в формулу шага 3 даёт то же:

$$K_{\max} = \frac{mg}{l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{mgl}{4}.$$

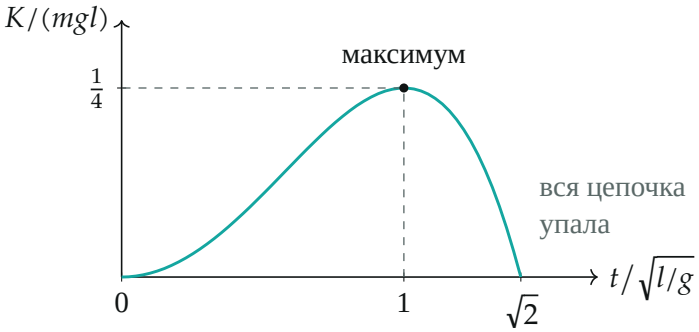
Обратите внимание: максимум энергии не совпадает с максимумом скорости. Скорость неупавших звеньев растёт до самого конца ($v = \sqrt{2gx}$ достигает $\sqrt{2gl}$ при $x = l$), а энергия наибольшая уже на полпути, потому что к этому моменту половина массы остановилась.

Проверка. Размерность: $[mgl]$ — килограмм на метр в секунду в квадрате на метр, то есть джоуль; $[\sqrt{l/g}] = \sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Второй

способ по времени: подставим $x = gt^2/2$ в $K(x)$,

$$K(t) = \frac{mg^2t^2}{2} - \frac{mg^3t^4}{4l}, \qquad \frac{dK}{dt} = mg^2t - \frac{mg^3t^3}{l} = 0 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Результат тот же (рис. 4). Предельные случаи: при $t = 0$ и при $t = \sqrt{2l/g}$ (время падения всей цепочки, $x = l$) энергия равна нулю, а максимум лежит между ними, в момент, в $\sqrt{2}$ раз более ранний, чем конец падения. Физический смысл: пока звенья набирают скорость, энергия растёт, но опора выбивает из движения всё больше массы, и к моменту, когда упала половина цепочки, выигрыш в скорости перестаёт покрывать потерю массы.



Кинетическая энергия не упавших звеньев в зависимости от времени (кривая построена по вычисленным точкам)

Ответ. $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$ (в этот момент упала ровно половина длины цепочки); $K_{\max} = \frac{mgl}{4}$, где m — масса всей цепочки.