Скорость как дуга окружности

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Тело движется вдоль некоторой оси x. Известно, что график зависимости проекции скорости тела на эту ось от его координаты по этой оси представляет собой (в определённом масштабе) «кусочек» окружности (см. рисунок). Найти проекцию ускорения тела в такой момент времени, когда координата и скорость тела соответствуют такой точке c данного графика, что $\angle cox = \alpha = 30°$ (этот угол отмечен дугой на рисунке). Величины v_0 и x_0 известны.

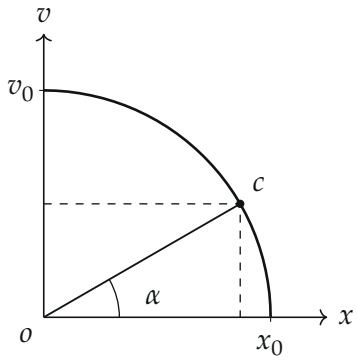
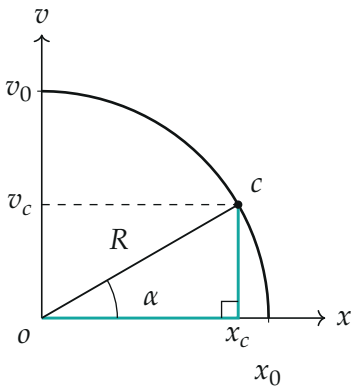


Рисунок условия: график зависимости проекции скорости от координаты — четверть окружности

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на связь между графиком $v(x)$ и ускорением. Если v и x связаны как точки окружности, то движение — гармонические колебания: именно такой график даёт, например, груз на пружине, у которого $mv^2/2 + kx^2/2 = E$ (в подходящем масштабе осей это окружность). Ускорение в колебаниях пропорционально координате и направлено к положению равновесия, $a = -\omega^2 x$. Поэтому план такой: найти частоту ω по величинам v_0 и x_0, найти координату тела в точке c и подставить. Масштаб осей на рисунке выбран так, что дуга — окружность, и угол α отложен на самом рисунке (рис. 2).

Обозначения. x_c, v_c — координата и проекция скорости в точке c; R — радиус окружности в единицах рисунка (на оси x ему отвечает x_0, на

оси v — v_0); ω — величина, определяемая ниже (окажется циклической частотой колебаний).



Масштаб осей выбран так, что дуга — окружность радиуса R, которому отвечают и x_0, и v_0

1. Координата и скорость в точке c**.** В единицах рисунка точка c лежит на окружности радиуса R, а угол между oc и осью x равен α, поэтому проекции радиуса на оси дают $x_c = R\cos\alpha$, $v_c = R\sin\alpha$. На оси x длина R отвечает значению x_0, на оси v — значению v_0, поэтому в физических величинах

$$x_c = x_0\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x_0, \qquad v_c = v_0\sin\alpha = \frac{1}{2}\,v_0.$$

Скорость в точке c равна половине наибольшей, а координата — $\sqrt{3}/2$ от наибольшей.

2. Какое это движение. Уравнение окружности в физических величинах:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{v^2}{v_0^2} = 1.$$

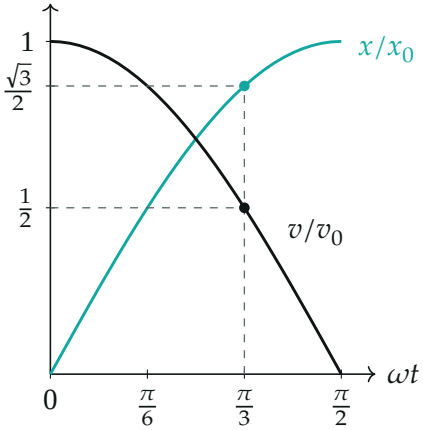
Так как сумма квадратов двух чисел равна единице, их можно записать как синус и косинус одного угла $\varphi(t)$:

$$x = x_0\sin\varphi, \qquad v = v_0\cos\varphi.$$

Но скорость — производная координаты по времени, $v = \dot{x} = x_0 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$. Сравним с $v = v_0 \cos\varphi$: получаем $\dot{\varphi} = v_0/x_0 = \text{const}$. Значит, $\varphi = \omega t$ с постоянной

$$\omega = \frac{v_0}{x_0},$$

и движение — гармонические колебания $x = x_0 \sin\omega t$, $v = v_0 \cos\omega t$ с амплитудой x_0 (рис. 3). В колебании точка графика равномерно обегает окружность: $\varphi = \omega t$ — её фаза.



Координата и скорость во времени (график построен по вычисленным точкам). Точки — момент, когда тело в точке c ($\omega t = \pi/3$)

3. Ускорение. Ускорение — производная скорости по времени:

$$a_x = \dot{v} = -v_0\,\omega \sin\omega t = -\omega^2 x_0 \sin\omega t = -\omega^2 x.$$

Знак минус: ускорение направлено к началу координат (к положению равновесия), и тем сильнее, чем дальше тело от него.

4. Подстановка. В точке c координата $x_c = \frac{\sqrt{3}}{2}x_0$, а $\omega = v_0/x_0$:

$$a_x = -\left(\frac{v_0}{x_0}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\,x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{v_0^2}{x_0} \approx -0{,}87\,\frac{v_0^2}{x_0}.$$

Отрицательная проекция при $x_c > 0$ и $v_c > 0$: тело движется вправо и

тормозится — как и должно быть на подходе к точке поворота x_0, где скорость равна нулю.

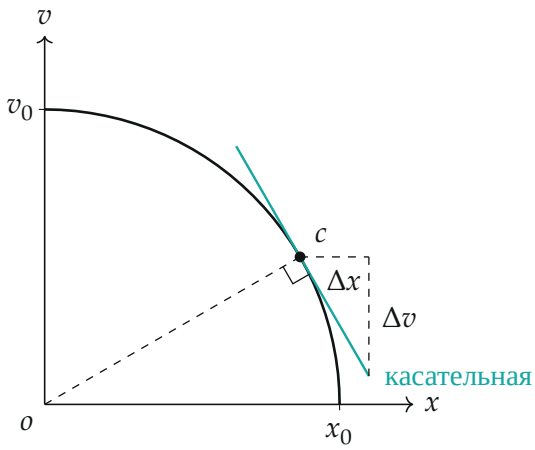
Второй способ: ускорение по наклону графика. Не пользуясь колебаниями, возьмём ускорение как $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$. Производная dv/dx — наклон касательной к графику $v(x)$ в точке c (рис. 4). Касательная к окружности перпендикулярна радиусу oc, поэтому на рисунке её наклон равен $-\operatorname{ctg}\alpha$ (при подъёме радиуса под углом α касательная идёт вниз под углом $90^\circ - \alpha$ к оси x), а в физических величинах нужно умножить на отношение масштабов v_0/x_0:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v_0}{x_0}\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{v_0}{x_0}\sqrt{3}.$$

Тогда

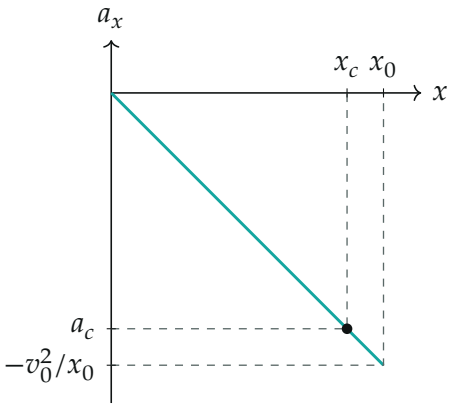
$$a = v_c\frac{dv}{dx} = \frac{v_0}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\,\frac{v_0}{x_0}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{v_0^2}{x_0}.$$

Тот же результат получается при дифференцировании уравнения окружности по времени: $\dfrac{2xv}{x_0^2} + \dfrac{2va}{v_0^2} = 0$, откуда $a = -\dfrac{v_0^2}{x_0^2}\,x$ при $v \neq 0$.



Касательная к графику в точке c перпендикулярна радиусу oc; по её наклону находят dv/dx (приращения Δx и Δv взяты вдоль касательной)

5. Зависимость ускорения от координаты. Формула $a_x = -\dfrac{v_0^2}{x_0^2}\,x$ даёт прямую линию через начало координат (рис. 5): в центре колебаний ускорение нулевое, у точки поворота x_0 оно наибольшее по модулю, v_0^2/x_0. Отмеченная точка — значение в точке c.



Зависимость ускорения от координаты: прямая через начало координат, наклон $-v_0^2/x_0^2$

Обратите внимание: угол $\alpha = 30°$ нарисован в масштабе, где дуга — окружность. Он не равен углу, тангенс которого есть v/x в физических единицах: в этих единицах $v_c/x_c = (v_0/x_0)\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому проекции надо брать как $x_0\cos\alpha$ и $v_0\sin\alpha$, а не как $v\operatorname{ctg}\alpha$ или $x\operatorname{tg}\alpha$ в единицах задачи.

Проверка. Размерность: $[v_0^2/x_0] = (\text{м/с})^2/\text{м} = \text{м/с}^2$. Предельные случаи: при $\alpha \to 0$ точка c приближается к x_0, и $a \to -v_0^2/x_0 = -\omega^2 x_0$ — наибольшее ускорение у точки поворота; при $\alpha \to 90°$ координата $x_c \to 0$ и $a \to 0$ — в центре колебаний. Оба способа дали один ответ; численная проверка при $v_0 = 2$, $x_0 = 1$ ($v = v_0\sqrt{1 - x^2/x_0^2}$, $a = v\,dv/dx$ в точке $x = \sqrt{3}/2$) даёт $-3{,}464 = -\sqrt{3}\cdot 2$, что совпадает с формулой.

Ответ. $a_x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\dfrac{v_0^2}{x_0}$ (направлено к началу координат).