Два подвижных блока и два тела

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Механическую систему, состоящую из двух невесомых подвижных блоков, двух тел массой m и $2m$ и невесомых и нерастяжимых нитей, удерживают в определённом положении (см. рисунок). В некоторый момент времени систему отпускают. Найти ускорения тел.

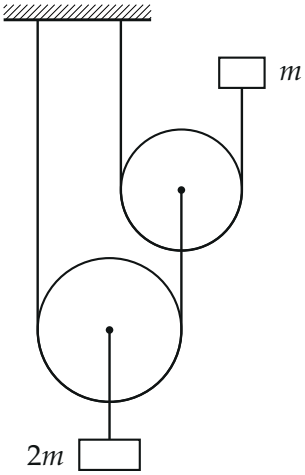


Рисунок условия: система из двух подвижных блоков и двух тел

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику системы с невесомыми блоками и нерастяжимыми нитями. Два факта решают её. Первый: невесомый блок не может иметь ненулевую равнодействующую (иначе у него было бы бесконечное ускорение), поэтому силы, приложенные к нему, уравновешены, и натяжения нитей связаны между собой. Второй: нить нерастяжима, поэтому перемещения тел и блоков связаны, а значит, связаны и ускорения. Остаётся записать второй закон Ньютона для двух тел и добавить эти две связи — сил и ускорений.

Устройство системы по рисунку. Нить A идёт от потолка вниз, огибает снизу нижний блок и привязана к оси верхнего блока. Нить B идёт от потолка вниз, огибает снизу верхний блок, поднимается вверх и привязана к нижней грани тела m: тело m расположено над блоком, а нить

тянет его вниз. Тело $2m$ подвешено к оси нижнего блока. Ось y направим вертикально вниз: тогда оба ускорения, если тела едут вниз, положительны.

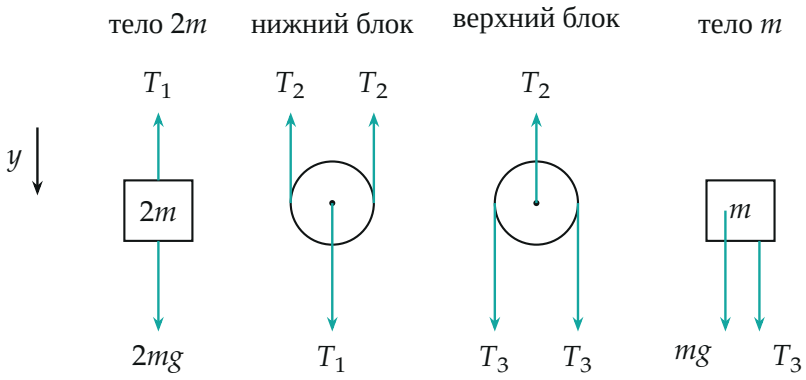
Обозначения. a_1, a_2 — проекции ускорений тел $2m$ и m на ось y; T_1 — сила натяжения нити (стержня), на которой висит тело $2m$; T_2 — натяжение нити A; T_3 — натяжение нити B. Нить невесомая, поэтому натяжение вдоль каждой нити одно и то же, и блоки считаем идеальными.

1. Второй закон Ньютона для тел. На тело $2m$ действуют сила тяжести $2mg$ вниз и сила T_1 вверх (рис. 2). Проекция на ось y:

$$2m\,a_1 = 2mg - T_1.$$

На тело m действуют сила тяжести mg вниз и сила натяжения нити B, которая тянет тело вниз, к блоку:

$$m\,a_2 = mg + T_3.$$



Силы, действующие на тела и на блоки (блоки невесомые, поэтому сумма сил на каждый равна нулю); ось y направлена вниз

2. Силы на блоках. Блоки невесомые, поэтому равнодействующая сил на каждом равна нулю.

На нижний блок вниз действует ось с силой T_1 (она передаёт вес тела $2m$ вместе с его ускорением), а вверх — две ветви нити A с силами T_2

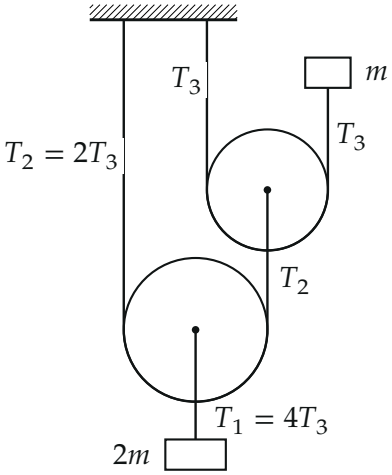
каждая:

$$T_1 = 2T_2.$$

На верхний блок вверх действует нить A, привязанная к его оси, с силой T_2, а вниз — две ветви нити B с силами T_3:

$$T_2 = 2T_3.$$

Следовательно, $T_1 = 4T_3$ (рис. 3). Блок с нитью даёт выигрыш в силе вдвое, два подвижных блока подряд — вчетверо.



Натяжения нитей: на каждом блоке сила удваивается, поэтому у нити к телу $2m$ она в четыре раза больше, чем у нити к телу m

3. Связь ускорений. Отсчитаем координаты вниз от потолка: y_1 — ось нижнего блока (вместе с телом $2m$), $y_в$ — ось верхнего блока, y_2 — нижняя грань тела m. Нить A состоит из левой ветви длиной y_1 (от потолка до оси нижнего блока), дуги вокруг блока постоянной длины и правой ветви длиной $y_1 - y_в$ (от нижнего блока вверх до верхнего). Длина нити постоянна:

$$y_1 + (y_1 - y_в) + \text{const} = L_A \quad \Rightarrow \quad y_в = 2y_1 + \text{const}.$$

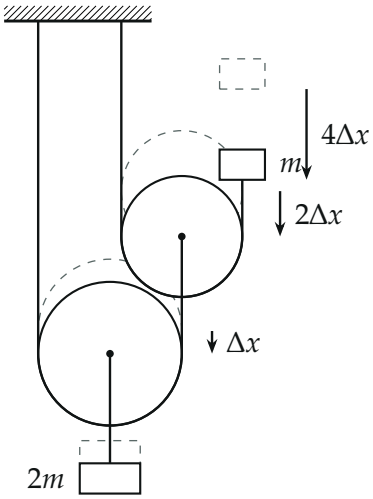
Нить B состоит из левой ветви длиной $y_в$, дуги вокруг верхнего блока и

правой ветви длиной $y_в - y_2$ (от верхнего блока вверх до тела m):

$$y_в + (y_в - y_2) + \text{const} = L_B \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2y_в + \text{const}.$$

Если тело $2m$ опустилось на Δx, то верхний блок опустился на $2\Delta x$, а тело m — на $4\Delta x$ (рис. 4). Перемещения в любой момент времени связаны так же, поэтому связаны и скорости, и ускорения:

$$a_2 = 4a_1.$$



Пунктиром — начальное положение. Если тело $2m$ опустилось на Δx, верхний блок опустился на $2\Delta x$, а тело m — на $4\Delta x$

4. Решение системы. Подставим $T_1 = 4T_3$ и $a_2 = 4a_1$ в уравнения шага 1:

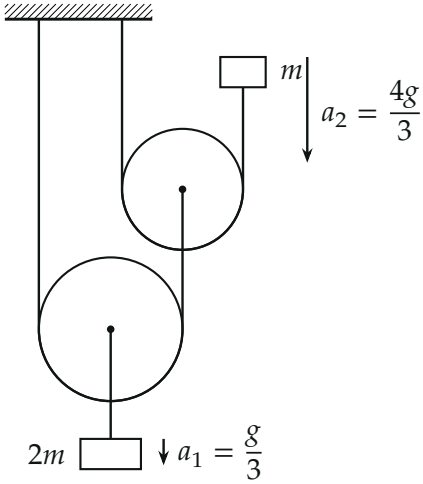
$$2m\,a_1 = 2mg - 4T_3, \qquad 4m\,a_1 = mg + T_3.$$

Из второго уравнения $T_3 = 4ma_1 - mg$. Подставим в первое:

$$2ma_1 = 2mg - 16ma_1 + 4mg \quad \Rightarrow \quad 18\,ma_1 = 6mg \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{g}{3},$$

$$a_2 = 4a_1 = \frac{4g}{3}.$$

Натяжения: $T_3 = \dfrac{mg}{3}$, $T_2 = \dfrac{2mg}{3}$, $T_1 = \dfrac{4mg}{3}$. Все они положительные, значит, все нити натянуты, и система действительно движется так (рис. 5): тело $2m$ опускается с ускорением $g/3$, тело m опускается с ускорением $4g/3$.



Ответ на схеме: ускорение тела m вчетверо больше, чем у тела $2m$ (длины стрелок в том же отношении), и больше g

Обратите внимание: ускорение тела m больше g, и это не противоречие: нить B тянет тело вниз с силой $mg/3$ в дополнение к силе тяжести. При $T_3 = 0$ оно падало бы с ускорением g, но падение тела $2m$ через блоки натягивает нить.

Проверка. Размерность: a_1, a_2 — ускорения, T — силы. Независимая проверка по мощности (без натяжений): сила тяжести за единицу времени совершает работу $2mgv_1 + mgv_2 = 2mgv_1 + 4mgv_1 = 6mgv_1$, кинетическая энергия растёт со скоростью $2mv_1a_1 + mv_2a_2 = 2mv_1a_1 + 16mv_1a_1 = 18mv_1a_1$. Приравняем: $18ma_1 = 6mg$, то есть $a_1 = g/3$ — тот же ответ. Смысл: два подвижных блока выигрывают в силе вчетверо и во столько же раз проигрывают в пути.

Ответ. $a_{2m} = \dfrac{g}{3}$ (тело $2m$ ускоряется вниз), $a_m = \dfrac{4g}{3}$ (тело m ускоряется вниз).