Индуктивность витков на рёбрах куба

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Виток тонкого провода, изогнутого вдоль четырёх рёбер куба (рис. 1), обладает индуктивностью L_1. Виток провода, изогнутого вдоль шести рёбер того же куба (рис. 2), обладает индуктивностью L_2. Найти индуктивность витка провода, изогнутого вдоль шести рёбер того же куба так, как это показано на рисунке 3.

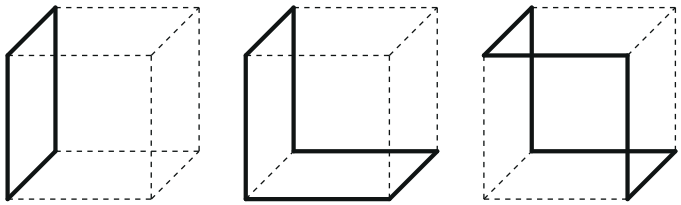


Рисунок условия: три витка на рёбрах куба

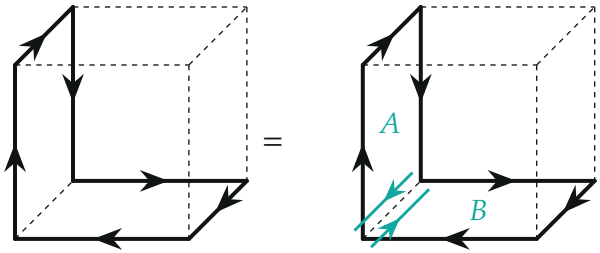
▲ **Решение.** **Что происходит.** Индуктивность L витка связывает ток I с потоком его собственного магнитного поля через сам виток: $\Phi = LI$. Считать поле каждого витка и интегрировать не нужно: три витка составлены из рёбер одного куба, и задача решается на симметрии и суперпозиции полей. Идея в том, что два провода в одном месте с токами $+I$ и $-I$ вместе не создают поля. Поэтому к витку можно мысленно дописать такую пару и увидеть в нём набор квадратных витков на гранях куба. Поток через составной виток равен сумме потоков, и в сумме встречаются только две величины: поток поля квадрата через самого себя, $\Phi_1 = L_1 I$, и поток поля одного квадрата через соседний (перпендикулярный, с общим ребром), Φ_{12}. Виток 2 даёт одно уравнение, из которого находим Φ_{12}, виток 3 — второе, из которого находим L_3.

Обозначения. I — ток в витке (одинаковый во всех опытах); A, B, C — квадратные витки на гранях куба; Φ_1 — поток поля одного такого квадрата через него самого; Φ_{12} — поток поля одного квадрата через соседний, перпендикулярный ему квадрат с общим ребром (токи в общем ребре направлены встречно); L_3 — искомая индуктивность витка 3.

1. Виток 1. Это квадрат на грани куба. По определению индуктивности поток его поля через него самого

$$\Phi_1 = L_1 I.$$

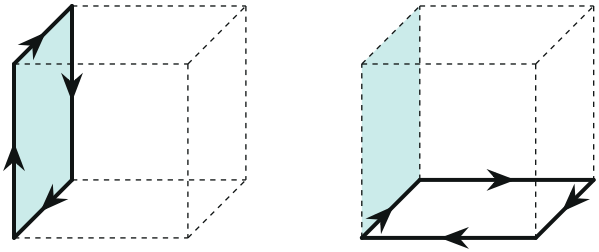
2. Виток 2 как два квадрата. Виток 2 идёт по шести рёбрам и ограничивает две соседние грани куба — A и B (рис. 2). Дополним его проводом вдоль общего ребра граней, пустив по этому ребру два тока: I и $-I$. Они взаимно уничтожаются, поэтому поле витка не изменилось. Но теперь токи образуют два квадратных витка A и B с током I в каждом: в общем ребре их токи направлены навстречу друг другу, и в сумме там ток равен нулю, как и было у витка 2.



Слева: виток 2 с направлением тока. Справа: тот же ток, разложенный на два квадрата A (левая грань) и B (нижняя грань). Лишнее ребро записано дважды с токами навстречу, его поле равно нулю

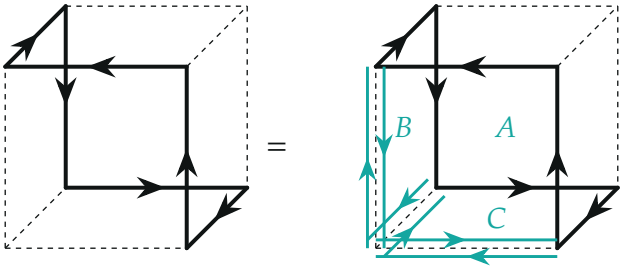
3. Поток через виток 2. Поток собственного поля витка 2 через него самого можно считать через поверхность, натянутую на виток, — две грани A и B. Поле витка 2 равно сумме полей квадратов A и B (рис. 3). Через грань A идёт поток своего поля Φ_1 и поток поля B, равный Φ_{12}; через грань B идёт поток своего поля Φ_1 и поток поля A, тоже равный Φ_{12} (взаимная индуктивность двух контуров одна и та же в обе стороны). Складывая, получаем

$$\Phi_2 = L_2 I = 2\Phi_1 + 2\Phi_{12} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{12} = \left(\frac{L_2}{2} - L_1\right) I.$$



Закрашена поверхность, через которую считают поток; жирным — контур с током, создающий поле. Слева поток равен Φ_1, справа — Φ_{12}

4. Виток 3 как три квадрата. Виток 3 идёт по шести рёбрам куба и ограничивает три грани A, B, C, сходящиеся в одной вершине куба (рис. 4). Дополним его проводами вдоль трёх рёбер, выходящих из этой вершины, и по каждому из них пустим токи I и $-I$ (всего шесть лишних проводов). Поле не изменится, а виток разложится на три квадрата с током I в каждом.

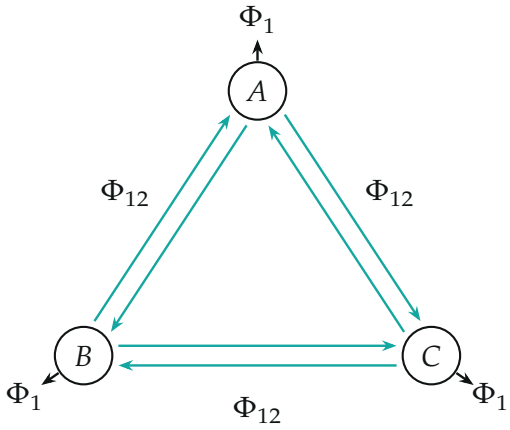


Слева: виток 3 с током. Справа: он же как сумма трёх квадратов A, B, C, сходящихся в одной вершине куба; три ребра у этой вершины записаны дважды с противоположными токами

5. Поток через виток 3. Поток поля витка 3 через него самого равен потоку суммарного поля через три грани A, B, C. Каждая грань пронизывается своим полем (Φ_1, всего три вклада) и полями двух других граней. Любые две из этих граней — перпендикулярные квадраты с общим ребром и встречными токами в нём, как грани A и B в витке 2, а потому поток поля одной через другую снова равен Φ_{12} (куб при повороте переходит сам в себя). Таких вкладов шесть: по два на каждую из трёх пар

(рис. 5):

$$\Phi_3 = L_3 I = 3\Phi_1 + 6\Phi_{12}.$$



Вклады в поток витка 3: каждая из трёх граней пронизывается своим полем (Φ_1, три вклада) и полями двух других (Φ_{12}, шесть вкладов)

6. Ответ. Подставим $\Phi_1 = L_1 I$ и $\Phi_{12} = \left(\dfrac{L_2}{2} - L_1\right) I$:

$$L_3 I = 3L_1 I + 6\left(\frac{L_2}{2} - L_1\right) I = 3L_1 I + 3L_2 I - 6L_1 I.$$

Сокращаем на I:

$$L_3 = 3\,(L_2 - L_1).$$

Обратите внимание: два провода с токами $+I$ и $-I$ в одном месте создают нулевое поле, и этим пользуются в обоих витках: добавляя «лишнее» ребро, мы ничего не меняем ни в поле, ни в потоке. Само число Φ_{12} вычислять не нужно — оно исключается из ответа.

Проверка. Размерность: L_3 — индуктивность, как L_1 и L_2; коэффициенты 3, -3 безразмерны. Независимая проверка расчётом: индуктивность витка равна сумме собственных частей его рёбер и взаимных индуктивностей пар рёбер по формуле Неймана. Перпендикулярные рёбра не взаимодействуют, а собственные части рёбер при равном числе

рёбер сокращаются в разности $L_3 - 3(L_2 - L_1)$ (у витка 1 — 4 ребра, у витков 2 и 3 — по 6: $6 - 3 \cdot (6 - 4) = 0$). Остаётся сумма взаимных индуктивностей параллельных рёбер, выраженных через длину ребра a: в единицах $\mu_0 a/4\pi$ они равны $-3{,}737$ (виток 1), $-5{,}100$ (виток 2) и $-4{,}088$ (виток 3), и $-4{,}088 = 3 \cdot (-5{,}100 + 3{,}737)$ с точностью до шестого знака. Значит, ответ верен. Смысл результата: индуктивность составного витка складывается из собственных потоков квадратов и перекрёстных потоков соседних граней, и число тех и других (три и шесть) даёт коэффициенты в ответе.

Ответ. $L_3 = 3\,(L_2 - L_1)$.