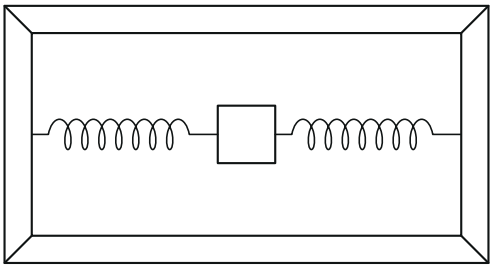
Тело на двух пружинах в рамке

Задача 2. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Тело прикрепляют с помощью двух пружин, коэффициенты жёсткости которых отличаются в два раза, к прямоугольной рамке. При этом тело может двигаться только вдоль длинной стороны рамки. Когда рамку расположили горизонтально (см. рисунок), тело оказалось точно посередине рамки, при этом пружины действуют на тело с силами F. Когда рамку расположили вертикально так, что более жёсткая пружина находится вверху, одна из пружин оказалась недеформированной. Найти массу тела. Считать, что для любых деформаций пружин справедлив закон Гука.



▲ **Решение. Что происходит.** В горизонтальном положении сила тяжести вдоль рамки не действует, и тело покоится только потому, что пружины действуют на него равными силами F в противоположные стороны. Когда рамку ставят вертикально, тело опускается на расстояние s: верхняя пружина удлиняется на s, нижняя на s укорачивается. Главная идея задачи: смещение s общее для обеих пружин, а силы меняются поразному, потому что жёсткости разные. Законы: закон Гука для каждой пружины и условие равновесия тела (второй закон Ньютона при $a = 0$) в проекции на вертикаль. Это статика с упругими силами: сравниваем два состояния тела — до поворота рамки и после.

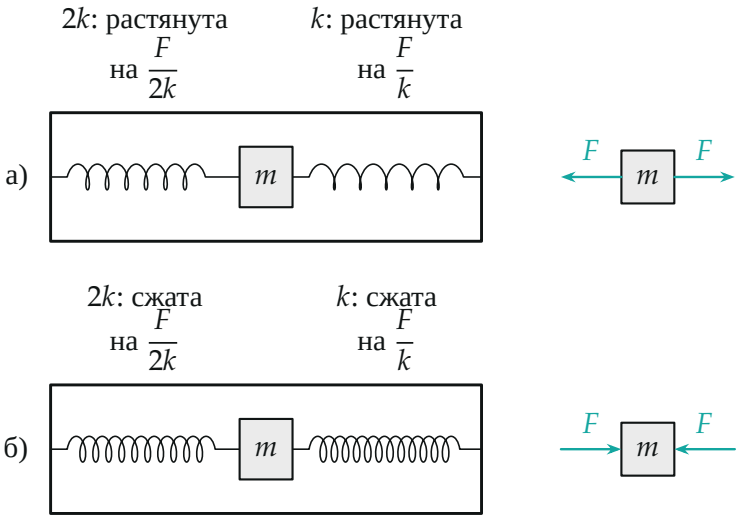
Обозначения. k — жёсткость мягкой пружины, $2k$ — жёсткой. Удлинение пружины считаем положительным, сжатие — отрицательным: $x_{ж}$ и $x_{м}$ — деформации жёсткой и мягкой пружин при горизонтальной рамке. s — смещение тела вниз при вертикальной рамке (знак пока неизвестен), ось y направлена вдоль рамки вниз.

Пункт 1. Горизонтальная рамка.

1. Обе пружины деформированы одинаково по знаку. Тело покоится, значит, сумма сил вдоль рамки равна нулю. Пружины действуют с равными по модулю силами F, поэтому силы направлены в противоположные стороны: обе пружины растянуты (тянут тело наружу) или обе сжаты (толкают тело внутрь). Если бы одна была растянута, а другая сжата, обе силы смотрели бы в одну сторону и тело не покоилось бы. Условие не говорит, какой случай реализован, поэтому разберём оба.

2. Деформации. Закон Гука для каждой пружины: $F = 2k\,|x_{\text{ж}}|$ и $F = k\,|x_{\text{м}}|$. Отсюда жёсткая пружина деформирована вдвое меньше мягкой:

$$\text{растянуты: } x_{\text{ж}} = \frac{F}{2k},\ x_{\text{м}} = \frac{F}{k}; \qquad \text{сжаты: } x_{\text{ж}} = -\frac{F}{2k},\ x_{\text{м}} = -\frac{F}{k}.$$



Горизонтальная рамка: а) обе пружины растянуты; б) обе сжаты. Справа — силы, действующие на тело; пружина $2k$ слева, пружина k справа

Пункт 2. Вертикальная рамка.

3. Смещение тела. Тело опустилось на s (проекция на ось y со знаком: $s > 0$ — вниз, $s < 0$ — вверх). Расстояние между стенками рамки не меняется, поэтому верхняя пружина удлиняется ровно на столько, на

сколько нижняя укорачивается:

$$x_в = x_ж + s, \qquad x_н = x_м - s.$$

Жёсткая пружина теперь верхняя, мягкая — нижняя; $x_в$ и $x_н$ — удлинения верхней и нижней пружин.

4. Равновесие тела. Запишем второй закон Ньютона для тела при $a = 0$ в проекции на ось y (вниз). Сила тяжести даёт $+mg$. Растянутая верхняя пружина тянет тело вверх: $-2k\,x_в$. Растянутая нижняя тянет вниз: $+k\,x_н$. Для сжатых пружин те же формулы работают с отрицательными x, поэтому отдельно случаи писать не нужно:

$$mg - 2k\,x_в + k\,x_н = 0.$$

Подставим $x_в$ и $x_н$:

$$mg = 2k\,(x_ж + s) - k\,(x_м - s) = (2k\,x_ж - k\,x_м) + 3k\,s.$$

Скобка равна разности сил жёсткой и мягкой пружин в горизонтальном положении, а там они равны ($\pm F$ каждая). Поэтому

$$mg = 3k\,s.$$

Смысл такой: на смещении s обе пружины вместе действуют как одна пружина жёсткостью $3k$ — верхняя добавляет $2ks$, нижняя убавляет ks. От силы F в этом соотношении ничего не осталось, она войдёт через смещение s из условия задачи.

Обратите внимание: из $mg = 3ks$ следует, что $s > 0$, то есть тело обязательно опускается. Варианты, в которых условие «одна пружина недеформирована» требует поднять тело, отпадают.

Пункт 3. Одна пружина недеформирована.

5. Какая именно. Недеформированной может быть верхняя ($x_в = 0$, тогда $s = -x_ж$) или нижняя ($x_н = 0$, тогда $s = x_м$). Вместе с двумя случаями горизонтального положения получаем четыре варианта, и подходят только те, где $s > 0$.

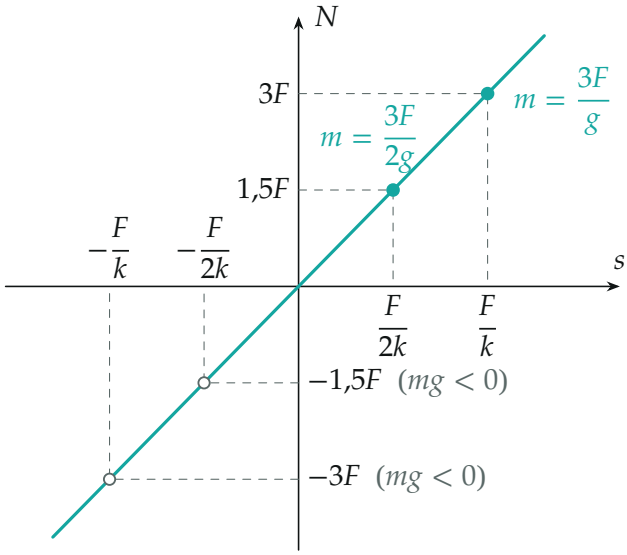
а) Пружины были растянуты ($x_ж = F/2k$, $x_м = F/k$). Верхняя неде-

формирована при $s = -F/(2k) < 0$: тело должно подняться, а вес тянет его вниз, этот вариант невозможен. Нижняя недеформирована при $s = x_м = F/k > 0$, и

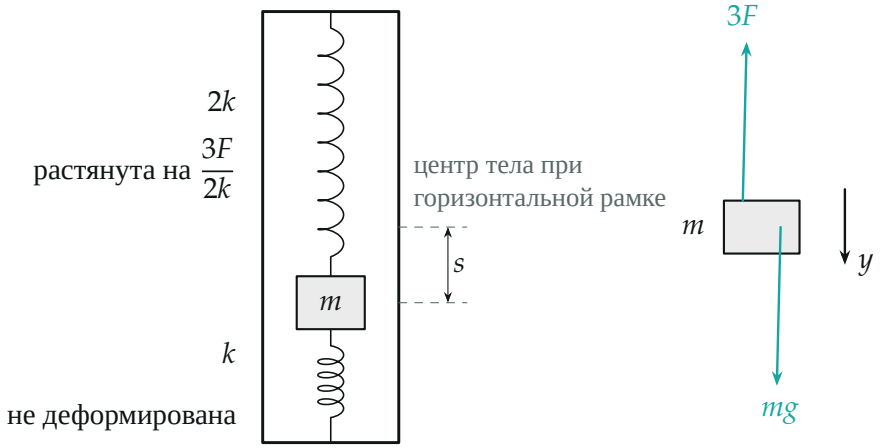
$$m = \frac{3k\,s}{g} = \frac{3F}{g}.$$

б) Пружины были сжаты ($x_ж = -F/2k$, $x_м = -F/k$). Нижняя недеформирована при $s = -F/k < 0$ — невозможно. Верхняя недеформирована при $s = -x_ж = F/(2k) > 0$, и

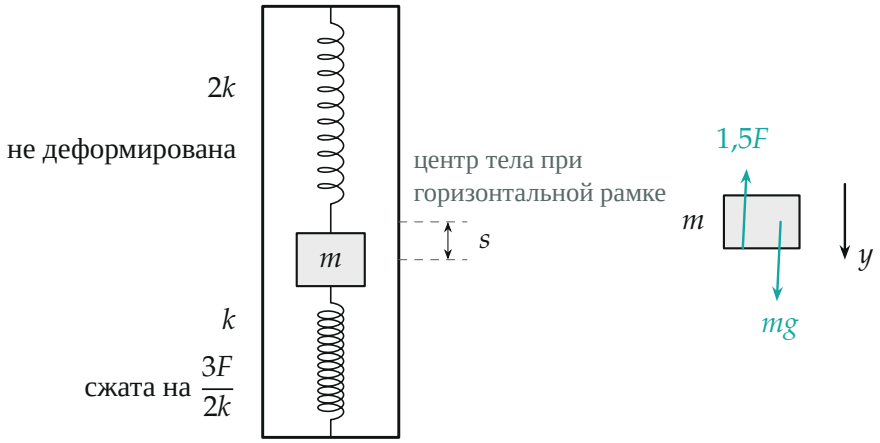
$$m = \frac{3k\,s}{g} = \frac{3F}{2g}.$$



Суммарная сила пружин $N = 3ks$ на смещении s: чтобы уравновесить вес, нужно $N = mg > 0$. Закрашенные точки — два подходящих случая, пустые — два невозможных



Случай а): рамка вертикальна, нижняя пружина не деформирована, верхняя растянута на $\frac{F}{2k} + \frac{F}{k} = \frac{3F}{2k}$ *и тянет тело вверх с силой* $3F$



Случай б): верхняя пружина не деформирована, нижняя сжата на $\frac{F}{k} + \frac{F}{2k} = \frac{3F}{2k}$ *и толкает тело вверх с силой* $1{,}5F$

6. Проверка силами, как на рисунках. В случае а) нижняя пружина силы не создаёт (она потеряла свою силу F), а верхняя растянута на $\frac{3F}{2k}$ и тянет вверх с силой $2k \cdot \frac{3F}{2k} = 3F$, то есть $mg = 3F$. В случае б) верхняя пружина не деформирована, нижняя сжата на $\frac{3F}{2k}$ и толкает вверх с силой

$k \cdot \frac{3F}{2k} = \frac{3F}{2}$, то есть $mg = \frac{3}{2}F$. Оба результата совпадают с ответами, полученными через $mg = 3ks$.

Обратите внимание: условие допускает оба случая, и выбрать между ними по тексту задачи нельзя, поэтому правильный ответ состоит из двух значений массы.

Проверка. Размерность: F/g — сила на ускорение, то есть масса. Ответ не зависит от жёсткости k и от длин пружин: деформации и смещение выражаются через F/k, и k сокращается. Численная проверка (python): при $k = 100$ Н/м, $F = 2$ Н верхняя недеформирована для сжатых пружин при $s = 0{,}01$ м, нижняя — для растянутых при $s = 0{,}02$ м, откуда $m = 3ks/g = 0{,}306$ кг $= 3F/(2g)$ и $m = 0{,}612$ кг $= 3F/g$; остальные два варианта дают $m < 0$.

Ответ. $m = \dfrac{3F}{g}$, если в горизонтальном положении пружины были растянуты, или $m = \dfrac{3F}{2g}$, если они были сжаты (условие допускает оба случая).