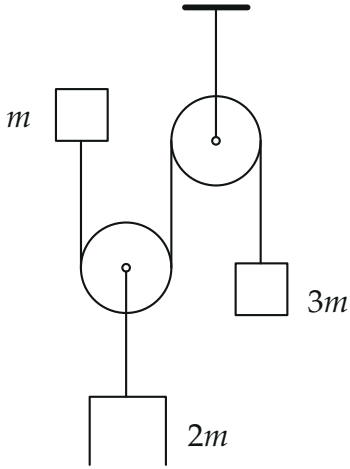
Три тела на подвижном и неподвижном блоках

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Имеется система из трёх тел с массами m, $2m$ и $3m$ и двух невесомых блоков, один из которых неподвижный, второй — подвижный. Тела m и $3m$ привязывают к верёвке, которую пропускают через блоки, тело $2m$ привязывают к оси подвижного блока. До некоторого момента тела удерживают, а затем отпускают. Найти ускорения тел.



▲ **Решение. Что происходит.** Три тела связаны одной верёвкой, которая идёт через два блока. Блоки невесомые, трения нет, поэтому сила натяжения T одинакова на всей верёвке, а подвижный блок получает от двух ветвей верёвки силу $2T$. Верёвка нерастяжима, поэтому ускорения тел связаны одним уравнением. Получаем четыре неизвестных (a_1, a_2, a_3 и T) и четыре уравнения: три закона Ньютона для тел и одно уравнение кинематической связи. Это стандартный класс задач «связанные тела»: сначала динамика каждого тела, потом связь ускорений.

Обозначения. Ось y направлена вертикально вниз. a_1, a_2, a_3 — проекции ускорений тел m, $2m$ и $3m$ на ось y (положительные значения — вниз), T — сила натяжения верёвки, привязанной к телам m и $3m$.

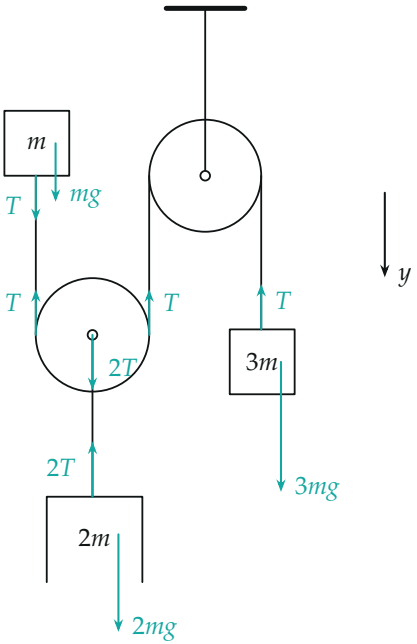
1. Силы на каждое тело. Выбираем ось вниз, чтобы все силы тяжести были положительны, а знаки ускорений в конце сами показали направ-

ление движения. На тело m действуют сила тяжести mg вниз и натяжение T верёвки, которая уходит от него вниз к подвижному блоку, то есть тоже вниз. На тело $3m$ действуют $3mg$ вниз и T вверх. Тело $2m$ привязано к оси подвижного блока. Блок невесомый, поэтому сумма сил на него равна нулю: две ветви верёвки тянут его вверх с силами T каждая, значит, нить от тела $2m$ тянет его вниз с силой $2T$, а на тело $2m$ эта нить действует с той же силой $2T$ вверх.

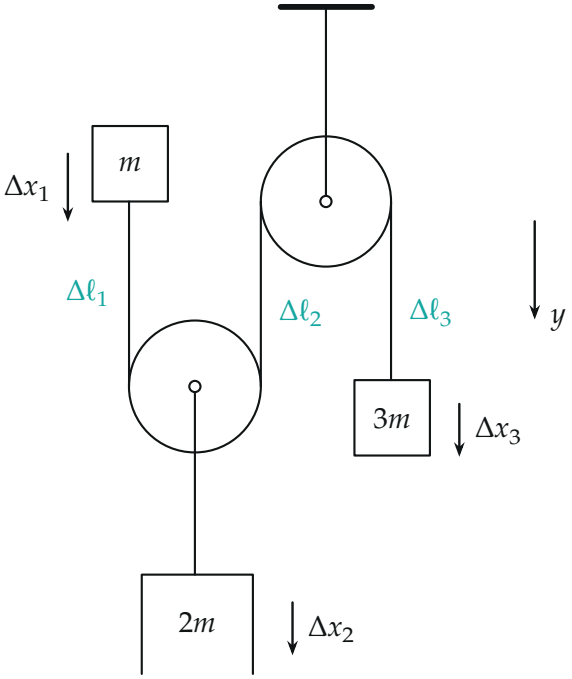
Обратите внимание: на тело $2m$ верёвка действует с силой $2T$, а не T. Это следствие невесомости подвижного блока: силы на него должны быть уравновешены.

2. Второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на ось y:

$$\begin{cases} ma_1 = mg + T, \\ 2ma_2 = 2mg - 2T, \\ 3ma_3 = 3mg - T. \end{cases}$$



Силы на тела и на подвижный блок; ось y направлена вниз



Перемещения тел и изменения длин участков верёвки; сумма $\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 = 0$

3. Связь ускорений. Верёвка нерастяжима, поэтому её полная длина не меняется. Пусть тело m сместилось вниз на Δx_1, тело $2m$ (вместе с подвижным блоком) — на Δx_2, тело $3m$ — на Δx_3. Верёвка состоит из трёх вертикальных участков (дуги по блокам не меняются). Участок от тела m до подвижного блока удлиняется на $\Delta\ell_1 = \Delta x_2 - \Delta x_1$: блок сместился вниз на Δx_2, тело m — на Δx_1, и расстояние между ними изменилось на разность. Участок от подвижного блока до неподвижного удлиняется на $\Delta\ell_2 = \Delta x_2$, ведь неподвижный блок остаётся на месте. Участок от неподвижного блока до тела $3m$ удлиняется на $\Delta\ell_3 = \Delta x_3$. Сумма изменений длин равна нулю:

$$(\Delta x_2 - \Delta x_1) + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_3 = \Delta x_1 - 2\Delta x_2.$$

Верно в каждый момент, поэтому и для скоростей, и для ускорений:

$$a_3 = a_1 - 2a_2.$$

То же словами: левее неподвижного блока две ветви верёвки вместе удлиняются на $2\Delta x_2 - \Delta x_1$. Этот кусок верёвки приходит с правой стороны через неподвижный блок, поэтому правая ветвь укорачивается на столько же, и тело $3m$ смещается вниз на $\Delta x_1 - 2\Delta x_2$.

4. Решение системы. Сначала избавимся от силы натяжения: удвоенное первое уравнение складываем со вторым, а удвоенное третье вычитаем из второго (в обоих случаях T сокращается):

$$2ma_1 + 2ma_2 = 4mg, \qquad 6ma_3 - 2ma_2 = 4mg,$$

откуда после деления на $2m$

$$a_1 + a_2 = 2g, \qquad 3a_3 - a_2 = 2g.$$

Выразим a_1 и a_3 через a_2 с помощью первого уравнения и связи:

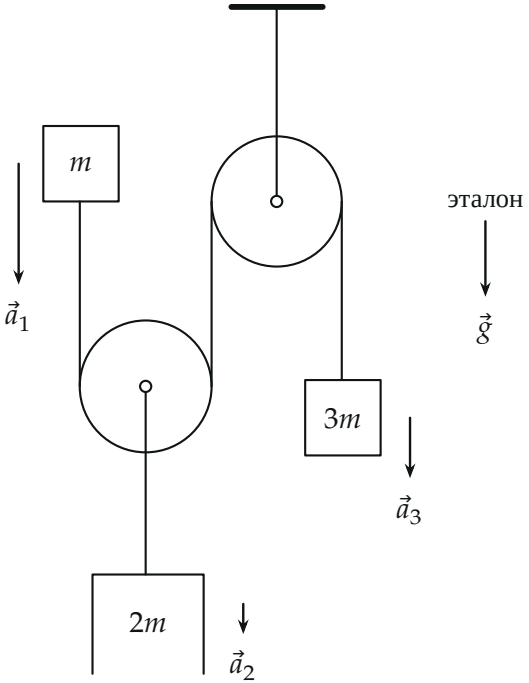
$$a_1 = 2g - a_2, \qquad a_3 = a_1 - 2a_2 = 2g - 3a_2.$$

Подставляем во второе уравнение: $3(2g - 3a_2) - a_2 = 2g$, то есть $6g - 10a_2 = 2g$, откуда

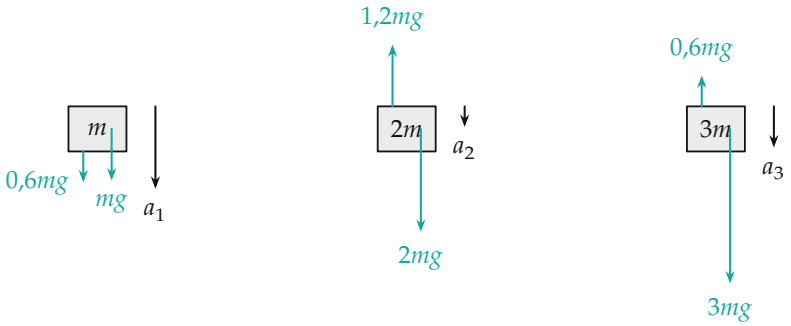
$$a_2 = \frac{2}{5}g, \qquad a_1 = 2g - \frac{2}{5}g = \frac{8}{5}g, \qquad a_3 = 2g - \frac{6}{5}g = \frac{4}{5}g.$$

Все три проекции положительны: все тела движутся вниз. Натяжение найдём из первого уравнения: $T = m(a_1 - g) = \frac{3}{5}mg > 0$: верёвка натянута, как и предполагалось.

Обратите внимание: ускорение тела m получилось больше g. Ошибки здесь нет: верёвка тянет это тело вниз с силой T дополнительно к силе тяжести.



Ускорения тел в масштабе: $a_1 = 1{,}6g$, $a_2 = 0{,}4g$, $a_3 = 0{,}8g$ *(справа для сравнения ускорение свободного падения* g*)*



Силы и ускорения тел при найденном натяжении (длины стрелок — в единицах mg *для сил и* g *для ускорений)*

5. Проверка: силы и ускорения. Подставим $T = \frac{3}{5}mg$ в уравнения Ньютона для каждого тела. Тело m: равнодействующая $mg + 0{,}6mg =$

$1{,}6mg$ даёт $a_1 = 1{,}6g$. Тело $2m$: $2mg - 1{,}2mg = 0{,}8mg$ даёт $a_2 = 0{,}4g$. Тело $3m$: $3mg - 0{,}6mg = 2{,}4mg$ даёт $a_3 = 0{,}8g$. Все три уравнения дают одну и ту же силу T, как и должно быть.

Второй способ без силы натяжения. Сила натяжения верёвки не совершает суммарной работы: за малое время тела проходят $v_1\,dt$, $v_2\,dt$ и $v_3\,dt$ (проекции скоростей на ось y), и работа сил натяжения равна $T\,v_1\,dt - 2T\,v_2\,dt - T\,v_3\,dt = T\,(v_1 - 2v_2 - v_3)\,dt = 0$ по уравнению связи. Значит, изменение кинетической энергии системы определяется только силами тяжести:

$$ma_1v_1 + 2ma_2v_2 + 3ma_3v_3 = mg\,v_1 + 2mg\,v_2 + 3mg\,v_3,$$

где $v_3 = v_1 - 2v_2$. Скорости v_1 и v_2 независимы, поэтому множители при них слева и справа должны совпасть:

$$a_1 + 3a_3 = 4g, \qquad a_2 - 3a_3 = -2g.$$

Вместе с $a_3 = a_1 - 2a_2$ это снова система трёх уравнений, но уже без T. Подставим найденные значения: $\frac{8}{5}g + 3 \cdot \frac{4}{5}g = 4g$ и $\frac{2}{5}g - 3 \cdot \frac{4}{5}g = -2g$ — обе проверки сходятся.

Проверка. Размерность: a/g — безразмерная величина. Один и тот же $T = \frac{3}{5}mg$ получается из всех трёх уравнений Ньютона (пункт 5). Здравый смысл: верёвка тянет тело m только вниз, поэтому $a_1 > g$ обязательно, и получилось $1{,}6g$. Ещё одна проверка — движение центра масс всей системы. Внешние силы: три силы тяжести и сила подвеса неподвижного блока $2T$ вверх (на блок давят две вертикальные ветви верёвки). Поэтому $ma_1 + 2ma_2 + 3ma_3 = 6mg - 2T$: слева $(1{,}6 + 0{,}8 + 2{,}4)\,mg = 4{,}8\,mg$, справа $6mg - 1{,}2mg = 4{,}8\,mg$.

Ответ. $a_1 = \frac{8}{5}\,g$ (тело m), $a_2 = \frac{2}{5}\,g$ (тело $2m$), $a_3 = \frac{4}{5}\,g$ (тело $3m$); все ускорения направлены вниз.