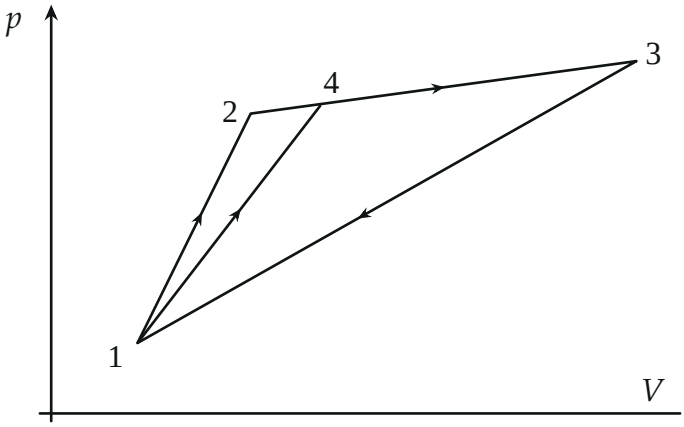
КПД двух треугольных циклов

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 4] С идеальным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, график которого в координатах «давление–объём» представляет собой треугольник, причём прямые 1–2, 2–3 и 1–3 являются возрастающими (см. рисунок). Известно, что термодинамический КПД процесса 1–2–3–1 равен η. Найти КПД процесса 1–4–3–1, если прямая 1–4 делит отрезок 2–3 на части, длины которых 2–4 и 4–3 относятся друг к другу как $1:4$ соответственно.



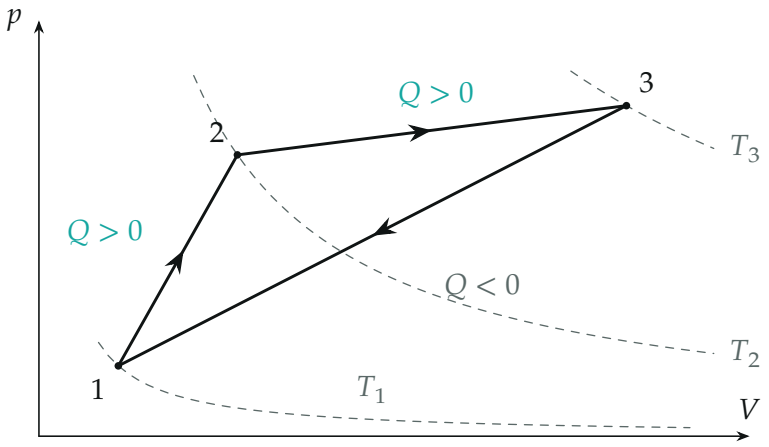
▲ **Решение. Что происходит.** У двух циклов общий участок 3–1, а основная разница — площадь: треугольник 1–4–3 меньше треугольника 1–2–3. КПД цикла — это работа за цикл, делённая на теплоту, полученную от нагревателя. Идея решения в том, чтобы выразить КПД через работу и теплоту, отданную холодильнику: на участке 3–1 газ только отдаёт тепло, и это количество у двух циклов одно и то же. Тогда ответ даёт отношение площадей треугольников. Класс задачи: КПД цикла, заданного ломаной на pV-диаграмме. Нужны три факта: где газ получает тепло, а где отдаёт; первое начало термодинамики за цикл; работа равна площади цикла.

Обозначения. A и A' — работы газа за циклы 1–2–3–1 и 1–4–3–1. $Q_\text{х}$ — количество теплоты, которое газ отдаёт на участке 3–1; $Q_\text{н}$, $Q'_\text{н}$

— теплоты, полученные газом за циклы 1–2–3–1 и 1–4–3–1. $\eta = A/Q_н$, искомый $\eta' = A'/Q'_н$.

1. Где газ получает тепло, а где отдаёт. Запишем первое начало термодинамики для малого участка процесса: $\delta Q = \nu C_V\, dT + p\, dV$, где $C_V > 0$. На любом из участков 1–2, 2–3 (а значит, и на 1–4, 4–3) газ движется вдоль возрастающей прямой вправо и вверх: растут и p, и V. Тогда растёт произведение $pV = \nu RT$, то есть $dT > 0$, и $dV > 0$. Оба слагаемых положительны, значит, $\delta Q > 0$ на всём участке — газ там только получает тепло. На участке 3–1 газ движется влево и вниз: $dT < 0$, $dV < 0$, оба слагаемых отрицательны, $\delta Q < 0$, газ только отдаёт тепло. На рисунке видно то же: при движении по возрастающей прямой вправо мы переходим на более высокие изотермы.

Обратите внимание: на возрастающей прямой теплота не меняет знак внутри участка. Поэтому не нужно искать точки, где газ переходит от нагрева к охлаждению, а количество теплоты за участок целиком идёт либо в $Q_н$, либо в $Q_х$.



Изотермы $T_1 < T_2 < T_3$ через точки 1, 2, 3: на возрастающих прямых газ переходит на более высокие изотермы и получает тепло, на 3–1 — на более низкие и отдаёт

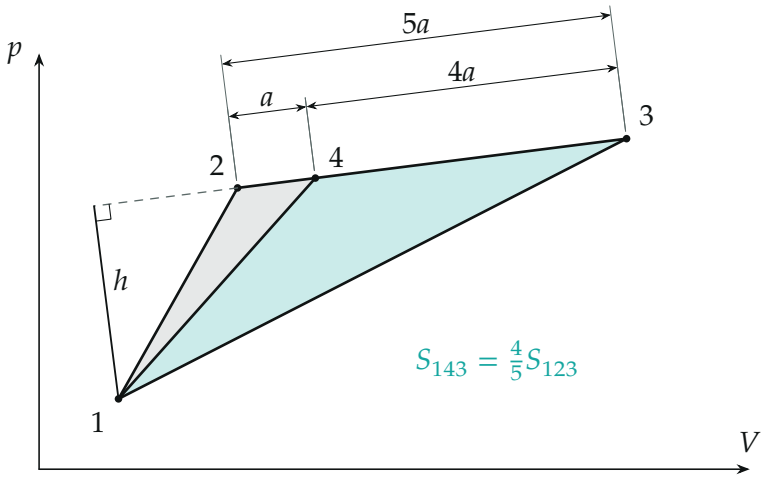
2. КПД через работу и отданное тепло. За цикл внутренняя энергия возвращается к исходной, $\Delta U = 0$, поэтому по первому началу работа за

цикл равна полученному минус отданному теплу: $A = Q_н - Q_х$. Отсюда $Q_н = A + Q_х$ и

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{A}{A + Q_х} = \frac{1}{1 + Q_х/A} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_х}{A} = \frac{1-\eta}{\eta}.$$

Для цикла 1–4–3–1 всё то же: газ получает тепло на 1–4 и 4–3, отдаёт на 3–1, и $\eta' = A'/(A' + Q'_х)$.

3. Отданное тепло одинаково. В обоих циклах газ отдаёт тепло только на участке 3–1. Это один и тот же процесс — та же прямая от точки 3 до точки 1, — поэтому и количество теплоты одно и то же: $Q'_х = Q_х$. Теплоты, полученные от нагревателя, у циклов разные.



Треугольники 1–2–3 и 1–4–3 с общей высотой h из вершины 1; основание 2–3 разделено в отношении 1 : 4

4. Работа равна площади, площади — отношение оснований. Работа газа за цикл по часовой стрелке равна площади треугольника цикла. Треугольники 1–2–3 и 1–4–3 имеют общую вершину 1, а их основания 2–3 и 4–3 лежат на одной прямой, поэтому высота h из вершины 1 у них общая, и площади относятся как основания. Из $|24| : |43| = 1 : 4$ следует $|24| = \frac{1}{5}|23|$ и $|43| = \frac{4}{5}|23|$. Значит,

$$S_{143} = \frac{4}{5}\,S_{123}, \qquad A' = \frac{4}{5}\,A.$$

Второй способ: треугольник 1–2–3 состоит из треугольников 1–2–4 и 1–4–3. Основание |24| составляет $\frac{1}{5}$ основания |23|, значит, $S_{124} = \frac{1}{5}S_{123}$ и $S_{143} = S_{123} - S_{124} = \frac{4}{5}S_{123}$. Результат тот же.

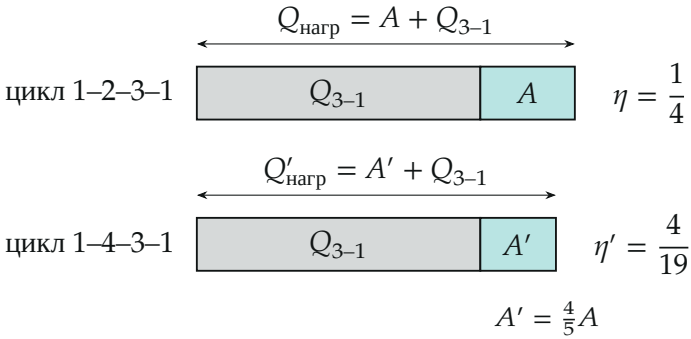
5. КПД второго цикла. Подставим $A' = \frac{4}{5}A$ и $Q'_{\text{х}} = Q_{\text{х}}$ в формулу пункта 2:

$$\eta' = \frac{A'}{A' + Q_{\text{х}}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + Q_{\text{х}}/A}.$$

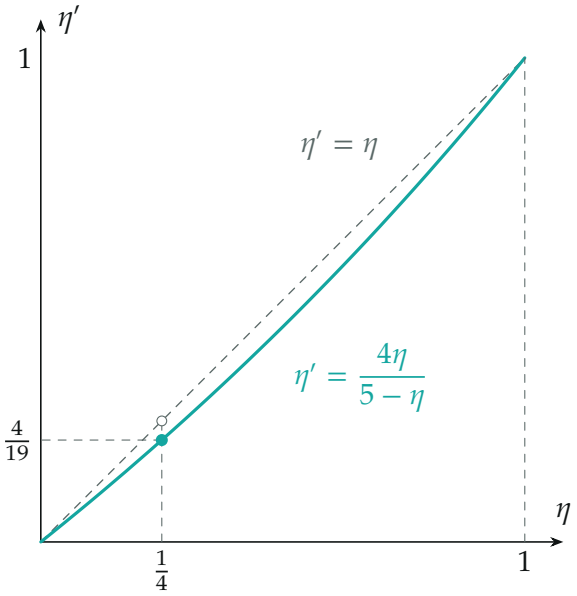
Отношение $Q_{\text{х}}/A = (1-\eta)/\eta$ берём из пункта 2:

$$\eta' = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{1-\eta}{\eta}} = \frac{4\eta}{4\eta + 5(1-\eta)} = \frac{4\eta}{5-\eta}.$$

Обратите внимание: нельзя написать $\eta' = \frac{4}{5}\eta$. Работа уменьшилась в $\frac{4}{5}$ раза, но и теплота нагревателя изменилась: $Q'_{\text{н}} = Q_{\text{н}} - \frac{1}{5}A$ — она уменьшилась меньше, чем работа, а теплота холодильнику осталась прежней.



Баланс энергии двух циклов при $\eta = 1/4$: отданное тепло одно и то же, работа уменьшается в $5/4$ раза, и доля работы в теплоте нагревателя падает до $4/19$



Зависимость $\eta'(\eta)$: кривая лежит ниже прямой $\eta' = \eta$ и сходится с ней в точках 0 и 1

Проверка. Размерность: η и η' безразмерны. Предельные случаи: $\eta \to 1$ (нет отданного тепла) даёт $\eta' \to 1$; $\eta \to 0$ даёт $\eta' \approx \frac{4}{5}\eta$, потому что при малой работе теплота нагревателя почти равна отданной, а она не менялась. Смысл ответа: $\eta' < \eta$ при $0 < \eta < 1$ (график лежит ниже прямой $\eta' = \eta$), то есть работа уменьшилась при той же отдаче тепла и КПД упал.

Численная проверка (python): для моноатомного газа ($C_V = \frac{3}{2}R$) и цикла с вершинами $(V;p) = (1;1)$, $(2{,}5;4)$, $(7{,}4;4{,}7)$, где точка 4 делит отрезок 2–3 как $1:4$, получаем $\eta = 0{,}0901$, $\eta' = 0{,}0734$ и $4\eta/(5-\eta) = 0{,}0734$; для двухатомного газа ($C_V = \frac{5}{2}R$) $\eta = 0{,}0623$, $\eta' = 0{,}0505$ и формула даёт 0,0505. Знаки теплоты на всех участках проверены по малым шагам.

Ответ. $\eta_{1431} = \dfrac{4\eta}{5-\eta}$.