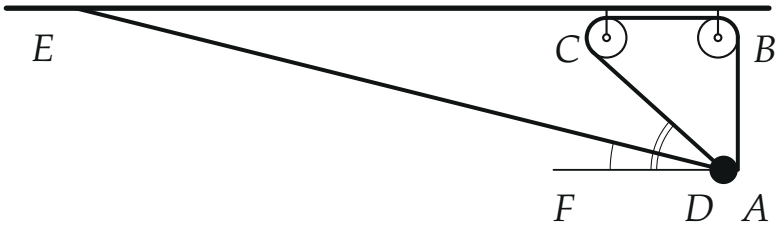
Бусинка на нити через блоки

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Нерастяжимая нить прикреплена к маленькой массивной бусинке в точке A, затем переброшена через блоки B и C, затем пропущена через сквозное отверстие D в той же бусинке, а затем прикреплена к потолку в точке E. Первоначально бусинку удерживают так, что участок нити AB вертикален, $\angle FDE = \alpha$ (отмечен на рисунке одной дугой), $\angle FDC = 3\alpha$ (отмечен на рисунке двумя дугами). Затем бусинку отпускают. Найти ускорение бусинки сразу после этого. Трения между нитью и стенками отверстия в бусинке отсутствует.



▲ **Решение. Что происходит.** К бусинке подходят три участка одной нити: AB, CD и DE. Нить идеальная, блоки неподвижные, трения нет, поэтому сила натяжения T одна и та же на всей нити, и все три участка тянут бусинку с одной силой T каждый — по трём разным направлениям. Нить нерастяжима, и это решает задачу: бусинка может сдвигаться только так, чтобы суммарная длина трёх участков не менялась. Отсюда следует, что сумма трёх сил натяжения перпендикулярна движению бусинки и не влияет на ускорение вдоль него. Поэтому ускорение даёт одна сила тяжести, спроецированная на направление движения. Сначала найдём направление движения из нерастяжимости, потом спроецируем g. Класс задачи: связь по нерастяжимой нити; сила натяжения нам не понадобится.

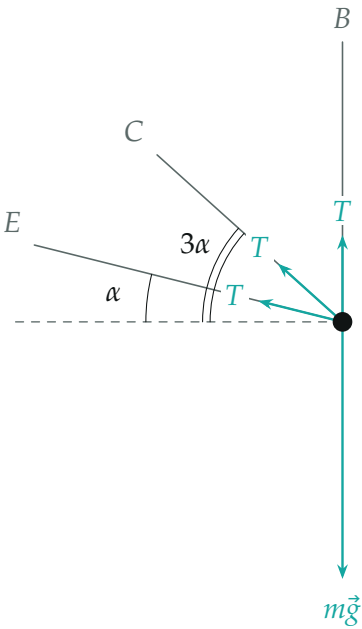
Обозначения. Ось x направлена вправо по горизонтали, ось y вверх. $\vec{e}_B$, $\vec{e}_C$, $\vec{e}_E$ — единичные векторы от бусинки вдоль нити к блоку B, к блоку C и к точке E; T — сила натяжения нити; $\vec{v}$ — скорость, с которой

бусинка начала бы двигаться, x — угол между направлением движения и горизонталью.

1. Силы на бусинку. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вниз. Участок AB тянет бусинку вдоль нити вверх, CD — к блоку C под углом 3α к горизонтали, DE — к точке E под углом α к горизонтали (оба влево и вверх). В координатах

$$\vec{e}_B = (0;\, 1), \qquad \vec{e}_C = (-\cos 3\alpha;\, \sin 3\alpha), \qquad \vec{e}_E = (-\cos\alpha;\, \sin\alpha).$$

Равнодействующая трёх натяжений $T\,\vec{S}$, где $\vec{S} = \vec{e}_B + \vec{e}_C + \vec{e}_E$. Все три слагаемых входят с одним и тем же T: нить скользит в отверстии без трения.



Силы на бусинку (рисунок для $\alpha = 14°$, длины стрелок — в масштабе): T вдоль каждого из трёх участков нити и сила тяжести $m\vec{g}$

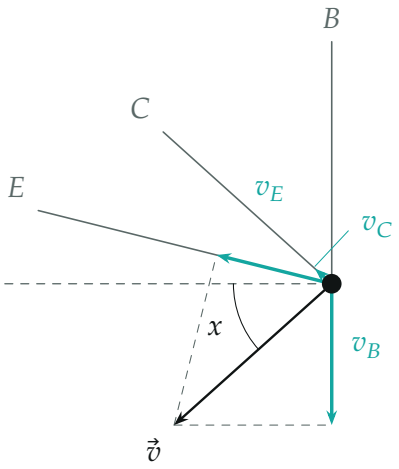
Обратите внимание: сила на бусинку от участка AB равна такой же T, хотя нить в точке A именно привязана, а в D — пропущена через отверстие. Это одна нить без разрывов, натяжение вдоль неё не меняется.

2. Нерастяжимость нити и направление движения. Длина нити постоянна. Блоки неподвижны, поэтому постоянна и сумма длин участков AB, CD и DE (участок BC и дуги по блокам не меняются). За малое время dt бусинка смещается на $\vec{v}\,dt$, и длина участка нити, идущего к блоку или потолку, меняется на минус проекцию этого смещения на направление нити: приближаемся к блоку — участок укорачивается, удаляемся — удлиняется. Сумма изменений равна нулю:

$$-\vec{v}\cdot\vec{e}_B - \vec{v}\cdot\vec{e}_C - \vec{v}\cdot\vec{e}_E = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}\cdot\vec{S} = 0.$$

Запишем это через углы. Пусть бусинка движется вниз и влево под углом x к горизонтали. Скорость составляет с направлением DE угол $x+\alpha$, с направлением DC угол $x+3\alpha$, а с направлением вверх (к блоку B) угол $90^\circ + x$. Проекции скорости на три нити: $v_E = v\cos(x+\alpha)$, $v_C = v\cos(x+3\alpha)$, $v_B = v\cos(x+90^\circ) = -v\sin x$. Их сумма равна нулю, $v_E + v_C + v_B = 0$; после деления на v получаем

$$\cos(x+\alpha) + \cos(x+3\alpha) = \sin x.$$



Скорость $\vec{v}$ и её проекции на нити ($\alpha = 14^\circ$, $x = 41{,}9^\circ$): DE и DC укорачиваются, AB удлиняется

Раскроем косинусы суммы:

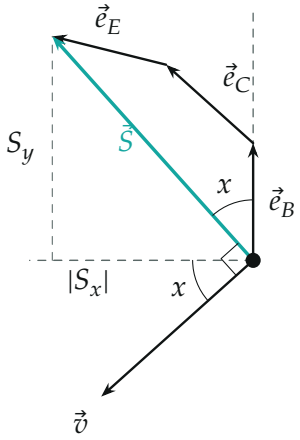
$$\cos x\,(\cos\alpha+\cos 3\alpha)-\sin x\,(\sin\alpha+\sin 3\alpha)=\sin x,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x=\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{1+\sin\alpha+\sin 3\alpha}.$$

Числитель и знаменатель положительны (при $3\alpha<90°$), поэтому x острый: бусинка действительно начинает двигаться вниз и влево, как предполагалось.

Второй способ. Условие $\vec{v}\cdot\vec{S}=0$ означает, что $\vec{v}$ перпендикулярна $\vec{S}$. Сложим три единичных вектора на рисунке: $\vec{S}=(-(\cos\alpha+\cos 3\alpha);\ 1+\sin\alpha+\sin 3\alpha)$. Направление $\vec{v}$ получается поворотом $\vec{S}$ на 90°, поэтому угол x между $\vec{v}$ и горизонталью равен углу между $\vec{S}$ и вертикалью, и $\operatorname{tg} x=|S_x|/S_y$, где $|S_x|=\cos\alpha+\cos 3\alpha$, $S_y=1+\sin\alpha+\sin 3\alpha$ — тот же результат.



Сумма трёх единичных векторов $\vec{S}$ и скорость $\vec{v}\perp\vec{S}$; два угла x равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами

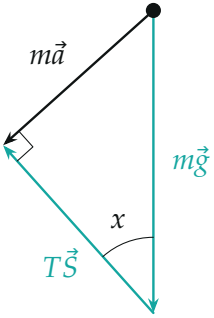
3. Ускорение сразу после отпускания. Запишем второй закон Ньютона для бусинки векторно:

$$m\vec{a}=m\vec{g}+T\,\vec{S}.$$

Бусинка начинает движение из покоя, и её ускорение направлено вдоль линии, по которой длина нити не меняется. Это видно из того же условия нерастяжимости: продифференцируем равенство $\vec{v}\cdot\vec{S}=0$ ещё раз; при $\vec{v}=0$ слагаемое с изменением направлений нитей обращается в нуль, и остаётся $\vec{a}\cdot\vec{S}=0$. Поэтому $\vec{a}$ направлено вдоль $\vec{v}$ (вдоль единичного вектора $\vec{d}=(-\cos x;-\sin x)$). Спроецируем второй закон Ньютона на это направление. Проекция силы тяжести равна $mg\sin x$, а проекция силы $T\vec{S}$ равна нулю, потому что $\vec{S}\perp\vec{d}$:

$$ma=mg\sin x \quad\Rightarrow\quad a=g\sin x.$$

Зачем именно это направление: на нём неизвестная сила T выпадает из уравнения, и находить её не нужно.



Треугольник сил: $m\vec{g}+T\vec{S}=m\vec{a}$; сила $T\vec{S}$ перпендикулярна ускорению, поэтому $ma=mg\sin x$ ($\alpha=14°$)

4. Ответ через α. Выразим синус через тангенс: $\sin x=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

Тогда

$$a=g\,\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\sqrt{(1+\sin\alpha+\sin 3\alpha)^2+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)^2}}.$$

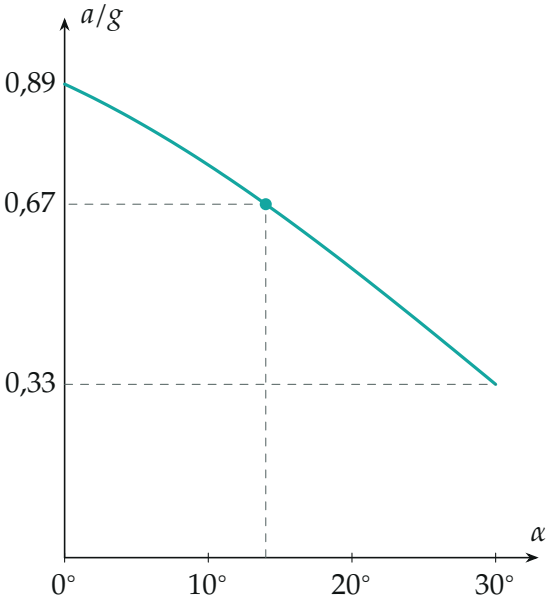
Раскроем скобки под корнем: $(1+s)^2+c^2=1+2s+(s^2+c^2)$, где $s=\sin\alpha+\sin 3\alpha$, $c=\cos\alpha+\cos 3\alpha$, и $s^2+c^2=2+2\cos(3\alpha-\alpha)=$

$2 + 2\cos 2\alpha$. Получаем

$$a = g\,\frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{\sqrt{3 + 2\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + 2\cos 2\alpha}} = g\sin x,$$

где, как выше, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{1 + \sin\alpha + \sin 3\alpha}$. Выражение под корнем — это $|\vec{S}|^2$, квадрат длины суммы трёх единичных векторов, а числитель — её горизонтальная составляющая: $a = g\,|S_x|/|\vec{S}|$.

5. Натянута ли нить. Спроецируем второй закон Ньютона на направление $\vec{S}$: $T|\vec{S}| - mg\,S_y/|\vec{S}| = 0$ (ускорение на это направление не проецируется, так как $\vec{a} \perp \vec{S}$). Отсюда $T = mg\,S_y/|\vec{S}|^2 > 0$ — нить натянута, и предположение, что она держит бусинку, верно.



Зависимость a/g от угла α при $0 < \alpha < 30°$; точка — $\alpha = 14°$, $a \approx 0{,}67g$

Проверка. Размерность: a/g безразмерно. Предельный случай $\alpha = 0$: участки CD и DE горизонтальны, AB вертикален. Если бусинка сместилась на dx влево и dy вниз, каждый из горизонтальных участков укоротился на dx, а вертикальный удлинился на dy, значит, $dy = 2\,dx$, $\operatorname{tg} x = 2$,

и $a = 2g/\sqrt{5} \approx 0{,}89g$; формула даёт то же ($\cos 0 + \cos 0 = 2$, под корнем $3 + 0 + 0 + 2 = 5$). Предельный случай $3\alpha = 90°$: участки CD и AB параллельны, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}/2}{2{,}5} \approx 0{,}35$, $a \approx 0{,}33g$ — меньше, потому что два вертикальных участка сильно удерживают бусинку, и она движется почти по горизонтали. Численная проверка (python): нить как пружина очень большой жёсткости, бусинка отпускается из положения $\alpha = 14°$, интегрируются уравнения движения — ускорение 6,55 м/с^2 при $g = 9{,}81$ м/с^2, то есть $0{,}668g$, что совпадает с $g \sin x = 0{,}668g$ при $x = 41{,}9°$.

Ответ. Ускорение направлено вниз и влево под углом x к горизонтали:

$$a = g \sin x, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{1 + \sin\alpha + \sin 3\alpha},$$

то же самое:

$$a = g\,\frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{\sqrt{3 + 2\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + 2\cos 2\alpha}}.$$