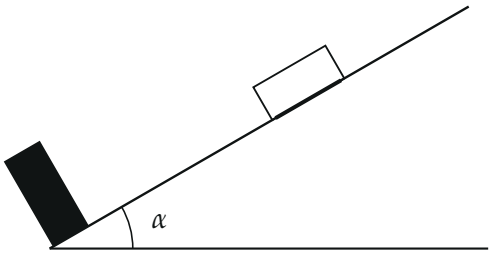
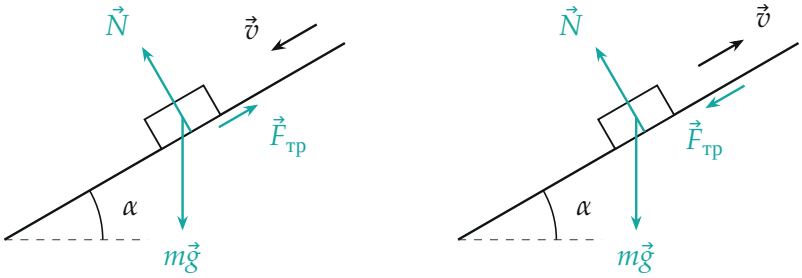
Тело у упругой стенки на наклонной плоскости

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 1] На наклонной плоскости с углом наклона α находится маленькое тело. На расстоянии l от тела находится упругая стенка. Коэффициент трения между телом и плоскостью k ($k = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$). Тело отпускают. Оно скользит по плоскости вниз, отражается от стенки, поднимется, снова движется в направлении стенки, снова отражается и т.д. Какой путь пройдёт тело к моменту его полной остановки? Столкновения тела со стенкой упругие.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело скользит вниз, упруго отскакивает от стенки, поднимается вверх по склону, снова скользит вниз и так далее. Подъём каждый раз короче спуска: при подъёме тормозят и сила тяжести, и трение, а при спуске трение лишь частично компенсирует силу тяжести. Поэтому тело останавливается не посреди склона, а у самой стенки: удары идут всё чаще и всё слабее. Главная идея: не разбирать подъёмы и спуски по одному, а записать энергетический баланс для всего движения целиком, от старта до остановки. Класс задачи — работа сил на пути со многими разворотами: работа тяжести зависит только от начального и конечного положения, а работа трения — от всего пройденного пути.

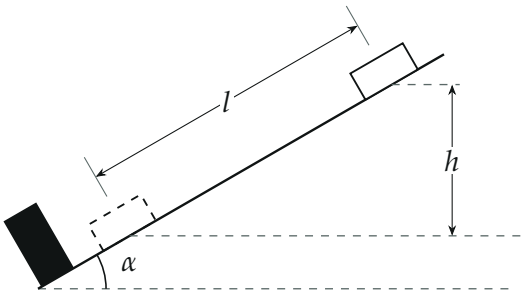
Обозначения. m — масса тела; S — полный путь тела (длина всей траектории, а не перемещение); $N = mg\cos\alpha$ — сила реакции склона: по нормали тело не движется, поэтому нормальная составляющая силы тяжести уравновешена; $F_{\text{тр}} = kN = kmg\cos\alpha$ — сила трения скольжения.



Силы, действующие на тело при спуске (слева) и при подъёме (справа): сила трения направлена против скорости

1. Где тело остановится. Покой на склоне возможен, только если сила трения способна удержать тело: $mg\sin\alpha \le kmg\cos\alpha$, то есть $k \ge \operatorname{tg}\alpha$. У нас $k = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha$: в любой точке склона составляющая силы тяжести вдоль склона больше максимальной силы трения, и тело снова поедет вниз. Остановиться оно может, только когда ему некуда двигаться, то есть вплотную к стенке, у нижней точки склона. Значит, к моменту остановки тело опустилось на расстояние l вдоль склона, то есть по вертикали на

$$h = l\sin\alpha.$$



Начальное положение тела (сплошной контур) и конечное, у стенки (пунктир): тело опустилось на высоту $h = l\sin\alpha$

2. Теорема об изменении кинетической энергии для всего движения. Запишем теорему для тела на всём пути от начала движения до остановки. В начале и в конце тело покоится, поэтому изменение кинетической энергии равно нулю. Упругий удар о неподвижную стенку мо-

дуль скорости не меняет, значит, работы над телом не совершает. Остаются сила тяжести и сила трения (реакция $\vec{N}$ перпендикулярна движению и работы не совершает):

$$0 = A_{mg} + A_{\text{тр}}.$$

Работа силы тяжести — работа консервативной силы: она не зависит от формы траектории и равна mg на разность высот начала и конца. Все подъёмы и спуски сокращаются, остаётся только итоговое опускание на h:

$$A_{mg} = mgh = mgl\sin\alpha.$$

Сила трения при скольжении всегда направлена против скорости, поэтому на любом малом перемещении dl_i её работа равна $-F_{\text{тр}}\,dl_i$, а сумма по всему движению даёт

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}S = -kmg\cos\alpha\,S.$$

Обратите внимание: в работе трения стоит *путь* S, а не перемещение. Перемещение тела l вниз, а путь, который тело проскользило туда и обратно, намного больше.

3. Ответ. Подставим работы в теорему и сократим mg:

$$l\sin\alpha = k\cos\alpha\,S \quad\Rightarrow\quad S = \frac{l\operatorname{tg}\alpha}{k} = \frac{l\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha} = 2l.$$

Вся начальная потенциальная энергия $mgl\sin\alpha$ превратилась в теплоту, выделенную трением.

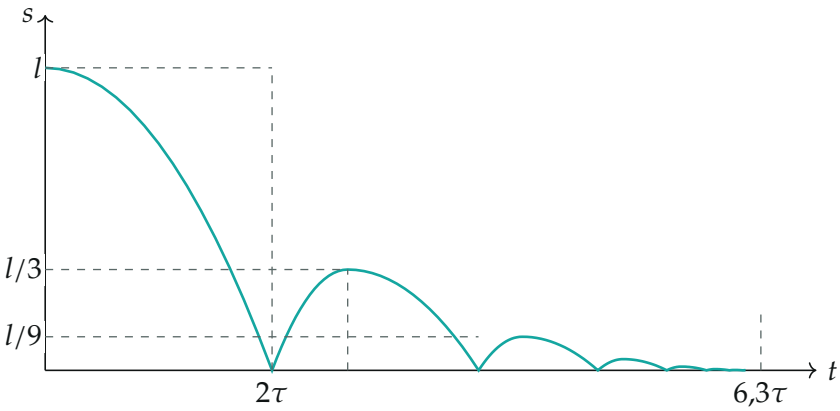
4. Второй способ: сумма отрезков. Проверим ответ, найдя путь прямо. Ускорение вниз по склону $a_\downarrow = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$, а так как $k\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$, получаем $a_\downarrow = \frac{1}{2}g\sin\alpha$. При подъёме трение направлено вниз, поэтому замедление $a_\uparrow = g(\sin\alpha + k\cos\alpha) = \frac{3}{2}g\sin\alpha$, то есть $a_\uparrow = 3a_\downarrow$. Пусть тело стартует с расстояния s от стенки. У стенки его скорость v удовлетворяет $v^2 = 2a_\downarrow s$; после упругого отражения модуль v тот же, и

до остановки тело поднимется на

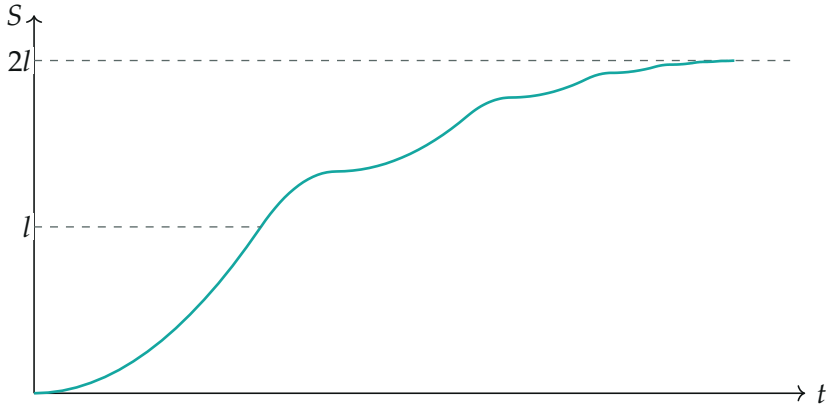
$$s' = \frac{v^2}{2a_\uparrow} = \frac{a_\downarrow}{a_\uparrow}\, s = \frac{s}{3}.$$

Каждый следующий подъём в три раза короче предыдущего: расстояния от стенки в точках поворота образуют убывающую геометрическую прогрессию l, $\frac{l}{3}$, $\frac{l}{9}$, ... со знаменателем $\frac{1}{3}$. Путь складывается из первого спуска l и из пар «подъём плюс такой же спуск»:

$$S = l + 2\left(\frac{l}{3} + \frac{l}{9} + \frac{l}{27} + \ldots\right) = l + 2 \cdot \frac{l/3}{1 - \frac{1}{3}} = l + l = 2l.$$



Расстояние от тела до стенки в зависимости от времени (здесь $\tau = \sqrt{l/(g\sin\alpha)}$): спуски — дуги парабол с ускорением $\frac{1}{2}g\sin\alpha$, подъёмы короче в три раза и круче; все удары о стенку укладываются в конечное время около $6{,}3\tau$



Пройденный путь S (по оси t те же единицы, что на предыдущем графике) только растёт и приближается к $2l$: после первого спуска пройдено l, каждая следующая пара «подъём — спуск» добавляет втрое меньше

Проверка. Размерность: $l\operatorname{tg}\alpha/k$ — длина (k и $\operatorname{tg}\alpha$ безразмерны). Предельные случаи для общего $k < \operatorname{tg}\alpha$: тот же расчёт даёт знаменатель прогрессии $q = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - k}{\operatorname{tg}\alpha + k}$ и $S = l\dfrac{1+q}{1-q} = \dfrac{l\operatorname{tg}\alpha}{k}$, что совпадает с результатом пункта 3. При $k \to 0$ путь $S \to \infty$: без трения тело прыгает вечно; при $k \to \operatorname{tg}\alpha$ путь $S \to l$: тело едва ползёт вниз и останавливается у стенки, не отскакивая. Бесконечное число ударов происходит за конечное время: время спусков и подъёмов тоже образует убывающую прогрессию (знаменатель $1/\sqrt{3}$), поэтому на графике все удары укладываются в $6{,}3\tau$.

Ответ. $S = \dfrac{l\operatorname{tg}\alpha}{k} = 2l.$