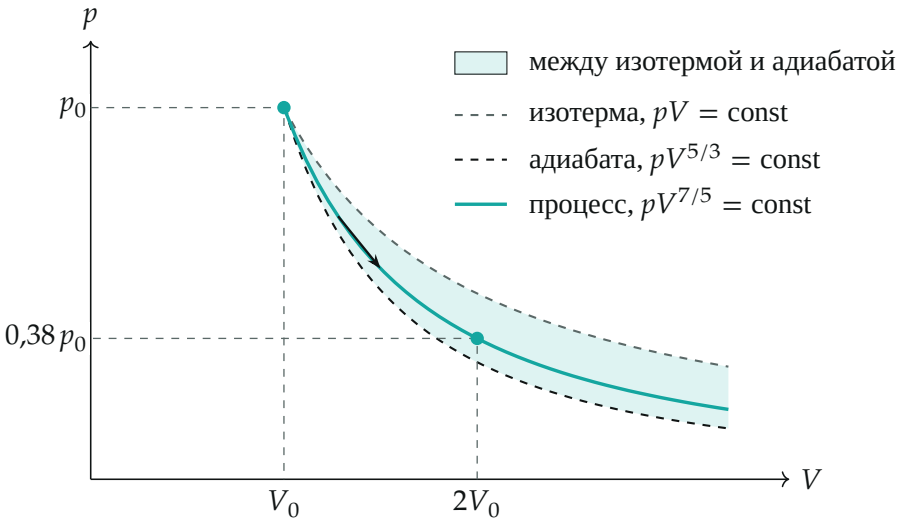
Процесс $V \propto T^{-5/2}$

Задача 2. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 2] В некотором тепловом процессе объём одноатомного идеального газа зависит от температуры по закону $V = \alpha T^{-(5/2)}$, где α — известная постоянная. Найти молярную теплоёмкость газа в этом процессе. Получает или отдаёт газ теплоту, если его объём возрастает?

▲ **Решение. Что происходит.** Температура и объём газа связаны жёстко: чем ниже температура, тем больше объём, причём объём растёт быстрее, чем падает T (степень $-\frac{5}{2}$). Газ охлаждается и при этом расширяется, то есть совершает большую работу. Молярная теплоёмкость по определению — это теплота на моль на один кельвин: $C = \dfrac{\delta Q}{\nu\,\Delta T}$, так что нужно найти теплоту δQ на малом шаге процесса. Идея: записать первое начало термодинамики для малого шага и выразить всё через ΔT — внутреннюю энергию, работу по уравнению состояния и закону процесса. Класс задачи: теплоёмкость заданного процесса; на малом шаге давление постоянно, поэтому работа равна $p\,\Delta V$.



Поясняющий рисунок: процесс $V \propto T^{-5/2}$ на диаграмме pV лежит между изотермой и адиабатой; стрелка — направление расширения

Обозначения. ν — число молей газа (не меняется); ΔT, ΔV, δQ — малые приращения температуры, объёма и подведённая теплота на выбранном шаге; все три — алгебраические величины и могут быть как положительными, так и отрицательными; p — давление в рассматриваемом состоянии.

1. Первое начало термодинамики для малого шага. Первое начало выполнено всегда:

$$\delta Q = \Delta U + \delta A.$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, а у одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$, поэтому

$$\Delta U = \tfrac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

2. Работа газа на малом шаге. На малом шаге давление практически не успевает измениться, поэтому работа равна площади узкой полоски под графиком $p(V)$:

$$\delta A = p\,\Delta V.$$

При расширении ($\Delta V > 0$) газ совершает положительную работу, при сжатии — отрицательную.

3. Связь ΔV и ΔT из закона процесса. Продифференцируем $V = \alpha T^{-5/2}$ и заметим, что $\alpha T^{-5/2}$ — это сам объём V:

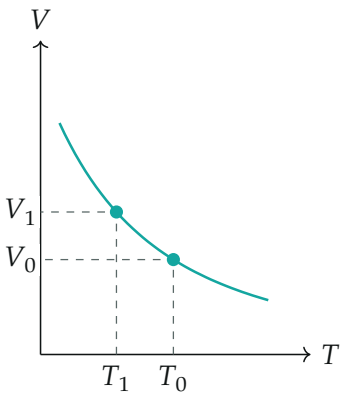
$$\Delta V = \frac{dV}{dT}\,\Delta T = -\frac{5}{2}\,\alpha T^{-7/2}\,\Delta T = -\frac{5}{2}\,\frac{V}{T}\,\Delta T.$$

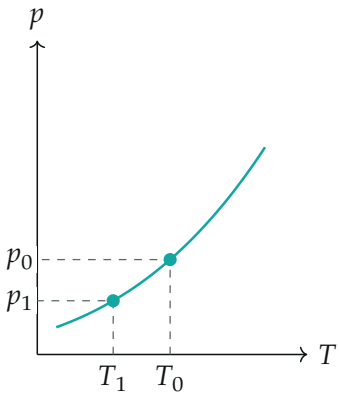
Охлаждение ($\Delta T < 0$) даёт расширение ($\Delta V > 0$): знак минус как раз об этом.

4. Давление. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для газа в рассматриваемом состоянии: $pV = \nu RT$, откуда $p = \dfrac{\nu RT}{V}$. Работа на шаге

$$\delta A = p\,\Delta V = \frac{\nu RT}{V}\cdot\left(-\frac{5}{2}\,\frac{V}{T}\,\Delta T\right) = -\frac{5}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

Обратите внимание: T, V и α сократились. Поэтому теплоёмкость окажется постоянной и от α не зависит.



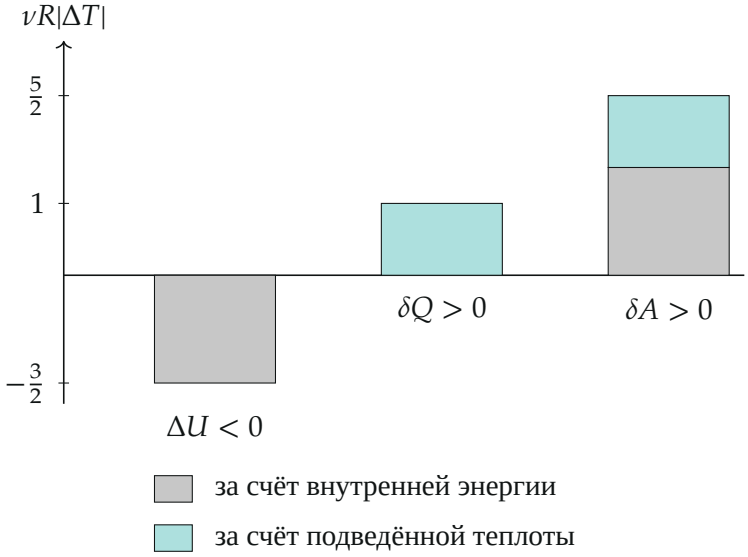


Как меняются объём и давление при охлаждении от T_0 до $T_1 < T_0$: объём растёт, давление падает

5. Теплота и теплоёмкость. Подставим ΔU и δA в первое начало:

$$\delta Q = \tfrac{3}{2}\nu R\,\Delta T - \tfrac{5}{2}\nu R\,\Delta T = -\nu R\,\Delta T, \qquad C = \frac{\delta Q}{\nu\,\Delta T} = -R.$$

6. Знак теплоты при расширении. Объём растёт, значит, из пункта 3 температура падает: $\Delta T < 0$. Тогда $\delta Q = -\nu R\,\Delta T > 0$: газ в действительности *получает* теплоту. Энергетический баланс на шаге: газ совершает работу $\frac{5}{2}\nu R|\Delta T|$, а его внутренняя энергия убывает только на $\frac{3}{2}\nu R|\Delta T|$; недостающие $\nu R|\Delta T|$ он берёт у окружающих тел. Отрицательная теплоёмкость значит, что при подводе теплоты газ охлаждается: расширяясь, он тратит на работу больше энергии, чем получает.



Баланс энергии при малом расширении ($\Delta T < 0$), в единицах $\nu R|\Delta T|$: работа $\delta A = \frac{5}{2}$ складывается из убыли внутренней энергии $\frac{3}{2}$ и подведённой теплоты 1

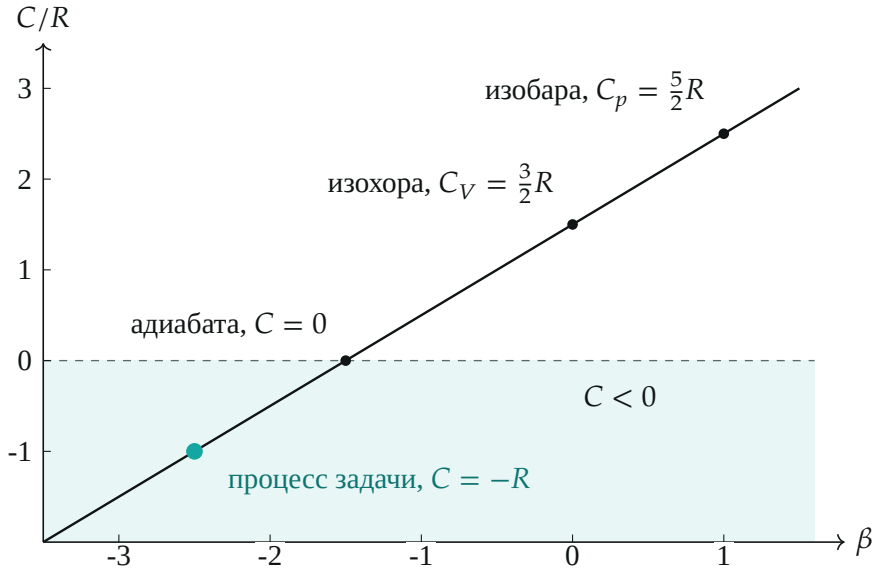
7. Второй способ: показатель политропы. Из $V \propto T^{-5/2}$ следует $T \propto V^{-2/5}$, а из уравнения состояния $p \propto T/V \propto V^{-7/5}$, то есть процесс — политропа $pV^{7/5} = \text{const}$ с показателем $n = \frac{7}{5}$. Для неё теплоёмкость

$$C = C_V + \frac{R}{1-n} = \tfrac{3}{2}R + \frac{R}{1-7/5} = \tfrac{3}{2}R - \tfrac{5}{2}R = -R,$$

как и выше. Показатель $n = \frac{7}{5}$ лежит между показателем изотермы (1) и адиабаты ($\frac{5}{3}$): процесс идёт «между» ними, а такие процессы имеют отрицательную теплоёмкость (рисунок к решению).

Тем же приёмом получается общий результат: для $V = \alpha T^\beta$ имеем $\Delta V = \beta \dfrac{V}{T} \Delta T$, $\delta A = \beta \nu R \, \Delta T$ и

$$C = \left(\tfrac{3}{2} + \beta\right) R.$$



Теплоёмкость процесса $V = \alpha T^\beta$ в зависимости от показателя β: известные процессы лежат на прямой, процесс задачи ($\beta = -\frac{5}{2}$) — в области отрицательных C

Проверка. Размерность: теплоёмкость выражена через R, то есть в джоулях на моль и кельвин, как и должно быть. Три известных процесса попадают на общую формулу: изохора ($\beta = 0$) — $C = \frac{3}{2}R = C_V$; изобара ($V \propto T$, $\beta = 1$) — $C = \frac{5}{2}R = C_p$; адиабата ($TV^{2/3} = \text{const}$, $\beta = -\frac{3}{2}$) — $C = 0$. Наш показатель $\beta = -\frac{5}{2}$ левее адиабатического, поэтому $C < 0$, и тем же рассуждением объясняется положение процесса между изотермой и адиабатой. Смысл: при расширении по этому закону газ получает теплоту от окружающих тел, а сам остывает.

Ответ. $C = -R$ (от α не зависит); при увеличении объёма газ получает теплоту.