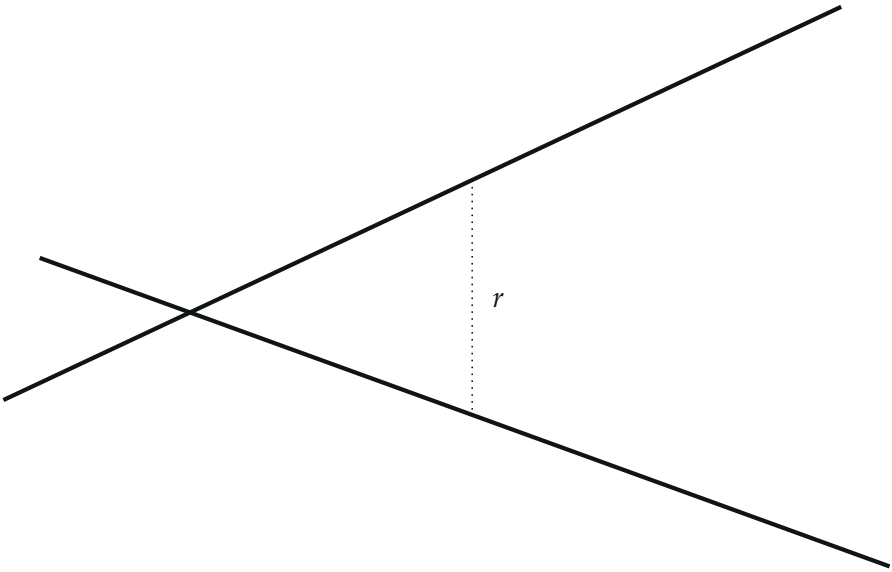
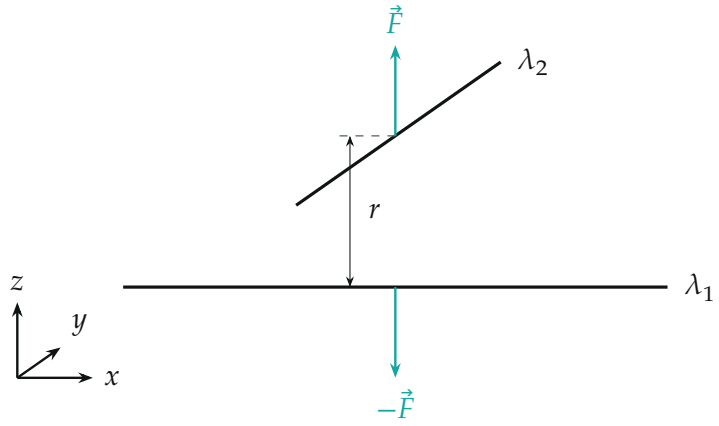
# Взаимодействие скрещенных заряженных нитей

**Задача 3.** [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Имеются две диэлектрических бесконечно длинных нити. Нити равномерно заряжены одноимёнными зарядами с линейной плотностью $\lambda$ и $2\lambda$. Нити расположили перпендикулярно друг другу в разных плоскостях, причём расстояние между их ближайшими точками равно $r$. Найти силу взаимодействия нитей. Ответ обосновать.




▲ **Решение. Что происходит.** Нити заряжены одноимённо, поэтому они отталкиваются; по симметрии сила направлена вдоль общего перпендикуляра к нитям. Расстояние $r$ — единственная длина в задаче, и она не может войти в ответ: сила имеет размерность $\lambda_1\lambda_2/\varepsilon_0$ (Кл$^2$/м$^2$ делим на Кл$^2$/(Н·м$^2$) — получаем Н), а безразмерного числа из одной длины составить нельзя. Остаётся найти числовой множитель. Идея: свести задачу к нити и бесконечной заряженной плоскости — там поле однородно и сила находится без интегралов; плоскость разрезается на полоски, перпендикулярные нити, а каждая полоска — это и есть вторая нить. Класс задачи — принцип суперпозиции: сила от всей плоскости равна сумме сил от её частей.

**Обозначения.** $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = 2\lambda$ — линейные плотности заряда нитей (до конца пункта 4 оставим общие буквы); ось $x$ — вдоль нити 1, ось $y$ — вдоль нити 2, ось $z$ — вдоль общего перпендикуляра. Нить 1 лежит на оси $x$ (при $z = 0$), нить 2 — в плоскости $z = r$ параллельно оси $y$; $\sigma$ — поверхностная плотность заряда вспомогательной плоскости.




*Расположение нитей и осей: нить 1 вдоль $x$, нить 2 вдоль $y$ на высоте $r$; силы взаимодействия направлены вдоль $z$*

**1. Вспомогательная задача: нить и заряженная плоскость.** Заменим нить 2 бесконечной плоскостью $z = r$ с поверхностной плотностью заряда $\sigma$ (нить 2 лежит в этой плоскости). Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости однородно и равно $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ на любом расстоянии от неё. На участок нити 1 длиной $l$ с зарядом $\lambda_1 l$ действует сила

$$F_{\text{пл}} = \lambda_1 l E = \frac{\lambda_1 \sigma l}{2\varepsilon_0},$$

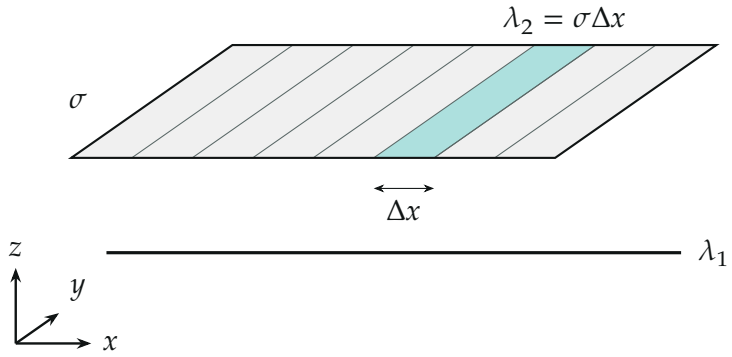
направленная вдоль $z$ от плоскости. Расстояние $r$ в этой формуле не входит.

**2. Плоскость — это набор нитей.** Разобьём плоскость на тонкие полоски вдоль оси $y$, перпендикулярные нити 1 (рисунок). Полоска шириной $\Delta x_i$ — это нить, перпендикулярная нити 1 на расстоянии $r$, с зарядом

на единицу длины $\lambda^{(i)} = \sigma\,\Delta x_i$, то есть в точности взаимное расположение нитей из условия. Обозначим $\Delta F_i$ силу, с которой полоска $i$ действует на нить 1. Все полоски расположены относительно нити одинаково (отличаются сдвигом вдоль $x$, а нить бесконечна, так что сдвиг ничего не меняет), поэтому сила пропорциональна только заряду полоски, а он пропорционален её ширине:

$$\Delta F_i = f_0\,\Delta x_i,$$

где $f_0$ — одна и та же величина для всех полосок.




*Плоскость $z = r$ разбита на полоски вдоль $y$; одна полоска выделена, она работает как нить с плотностью $\lambda_2 = \sigma\Delta x$*

**3. Складываем силы от полосок.** Все $\Delta F_i$ направлены одинаково — вдоль $z$, от плоскости, — поэтому складываются их модули. Возьмём участок нити длиной $l \gg r$ и полоски под ним: их суммарная ширина равна $l$, а поправки от краёв порядка $r/l$ пренебрежимо малы. Сумма сил от полосок должна дать силу от всей плоскости из пункта 1:

$$f_0\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots) = f_0\,l = \frac{\lambda_1\sigma\,l}{2\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad f_0 = \frac{\lambda_1\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

**4. Две нити.** Сила нити 1 и одной полоски — та самая сила взаимо-

действия двух перпендикулярных нитей с плотностями $\lambda_1$ и $\lambda_2 = \sigma\Delta x$:

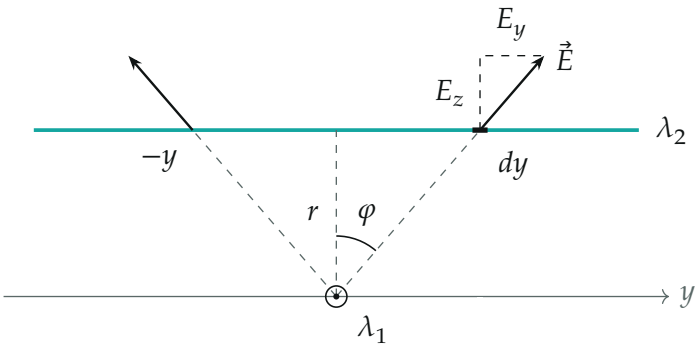
$$F = f_0\,\Delta x = \frac{\lambda_1\,\sigma\,\Delta x}{2\varepsilon_0} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\varepsilon_0}.$$

Подставим $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 2\lambda$:

$$F = \frac{\lambda\cdot 2\lambda}{2\varepsilon_0} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}.$$

Нити отталкиваются, сила направлена вдоль общего перпендикуляра. Расстояние $r$ в ответ не вошло, как и предсказывала размерность.

**5. Второй способ: прямое интегрирование.** Проверим множитель, не используя плоскость. Поле бесконечной нити 1 на расстоянии $\rho$ от неё (по теореме Гаусса) равно $E = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0\rho}$ и направлено перпендикулярно нити, от неё. Рассмотрим сечение плоскостью $yz$: нить 1 — точка $O$, нить 2 — прямая на высоте $r$. Малый элемент нити 2 с координатой $y$ и длиной $dy$ несёт заряд $\lambda_2\,dy$, находится на расстоянии $\rho = \sqrt{r^2+y^2}$ от $O$, и сила на него равна $dF = \lambda_2\,dy\,E$. Её проекция на $z$ содержит множитель $\cos\varphi = r/\rho$; проекции на $y$ у элементов с координатами $y$ и $-y$ противоположны, и при сложении сокращаются.

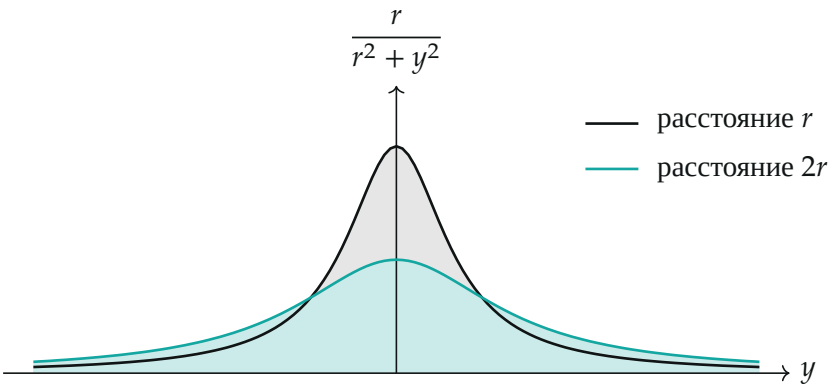



*Сечение плоскостью $yz$: поле нити 1 на элементе нити 2; составляющие $E_y$ у элементов $y$ и $-y$ противоположны и сокращаются*

Складываем проекции на $z$ по всей нити 2:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_2 \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0\rho} \cdot \frac{r}{\rho}\, dy = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\, dy}{r^2+y^2}$$
$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\operatorname{arctg}\frac{y}{r}\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\pi = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\varepsilon_0}.$$

Результат тот же. Видно и почему нет зависимости от $r$: при сближении нитей поле на ближайшем участке растёт как $1/r$, а длина участка, который даёт основной вклад, сжимается как $r$; площадь под графиком подынтегральной функции остаётся равной $\pi$.




*Подынтегральная функция для двух расстояний: при увеличении $r$ в два раза кривая вдвое ниже и вдвое шире, площадь под ней остаётся равной $\pi$*

**Проверка.** Размерность: $\lambda^2/\varepsilon_0$ — сила (см. «Что происходит»). Два независимых вывода — через плоскость и прямым интегрированием — дали один и тот же множитель $\frac{1}{2}$; численное интегрирование на python даёт $\pi$ с погрешностью $3\cdot10^{-4}$ (остаток — обрезанные хвосты). Для сравнения: у параллельных нитей сила на единицу длины $\lambda_1\lambda_2/(2\pi\varepsilon_0 r)$ убывает с расстоянием, а у перпендикулярных полная сила постоянна: взаимодействует лишь окрестность размера порядка $r$.

**Ответ.** $F = \dfrac{\lambda\cdot 2\lambda}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda^2}{\varepsilon_0}$; нити отталкиваются вдоль общего перпендикуляра, сила не зависит от расстояния $r$.