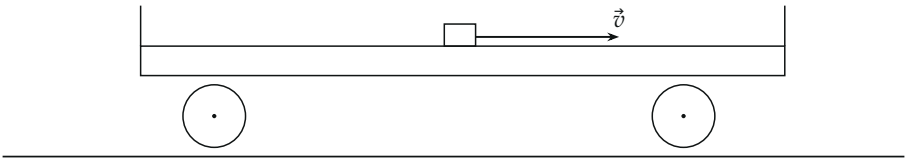
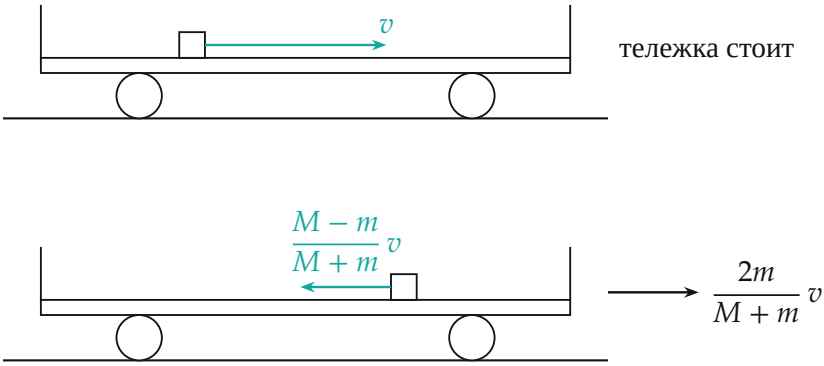
Тело в тележке с упругими бортиками

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 4] На горизонтальном столе покоится игрушечная тележка массой M и длиной L с высокими бортиками. В центре тележки находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени телу толчком сообщили скорость v в направлении переднего бортика тележки (см. рисунок). Испытав упругое столкновение с передним бортиком, тело отражается в направлении заднего бортика, стукнувшись о него — в направлении переднего и т.д. Какой путь пройдёт тележка к тому моменту, когда тело окажется в центре тележки, испытав 2020 столкновений с её бортиками?



▲ **Решение. Что происходит.** Тело бегает от борта к борту, а при каждом упругом ударе то толкает тележку вперёд, то останавливает её. Следить за каждым ударом незачем: нужны три факта. Первый: по горизонтали на систему «тележка + тело» ничто не действует, поэтому её импульс сохраняется, а центр масс едет с постоянной скоростью $v_0 = mv/(m+M)$. Второй: при упругом ударе относительная скорость меняет знак, но сохраняет модуль, поэтому относительно тележки тело всё время движется со скоростью v, и время считается по длине пути между бортами. Третий: в конце тело снова в центре тележки, значит, центр масс системы снова в центре тележки, и перемещение тележки равно перемещению центра масс. Класс задачи — замкнутая система и упругие удары.

Обозначения. Ось x направим по начальной скорости тела. Стол гладкий (трение не учитываем); центр масс самой тележки — в её середине (тележка симметрична); тело — точка. w — скорость тележки относительно стола, $u_{\text{отн}}$ — скорость тела относительно тележки, t — время от толчка до момента, когда тело после 2020-го удара окажется в центре, S — путь тележки.



Два состояния системы относительно стола (для $M > m$): до первого и после каждого чётного удара (вверху), после каждого нечётного удара (внизу)

1. Центр масс. Запишем закон сохранения импульса для системы «тележка + тело» в проекции на x: удары — внутренние силы, внешних горизонтальных сил нет. Сразу после толчка импульс системы равен mv (тележка покоится), поэтому на протяжении всего движения

$$(m + M)\, v_0 = mv \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{mv}{m + M} = \text{const}.$$

2. Относительная скорость при упругом ударе. Пусть до удара скорость тела u_1, тележки w_1, после удара u_2 и w_2. Закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии (удар упругий):

$$mu_1 + Mw_1 = mu_2 + Mw_2, \qquad mu_1^2 + Mw_1^2 = mu_2^2 + Mw_2^2.$$

Перенесём члены с телом влево, с тележкой — вправо:

$$m(u_1 - u_2) = M(w_2 - w_1), \qquad m(u_1^2 - u_2^2) = M(w_2^2 - w_1^2).$$

Разделим второе уравнение на первое: $u_1 + u_2 = w_1 + w_2$, то есть

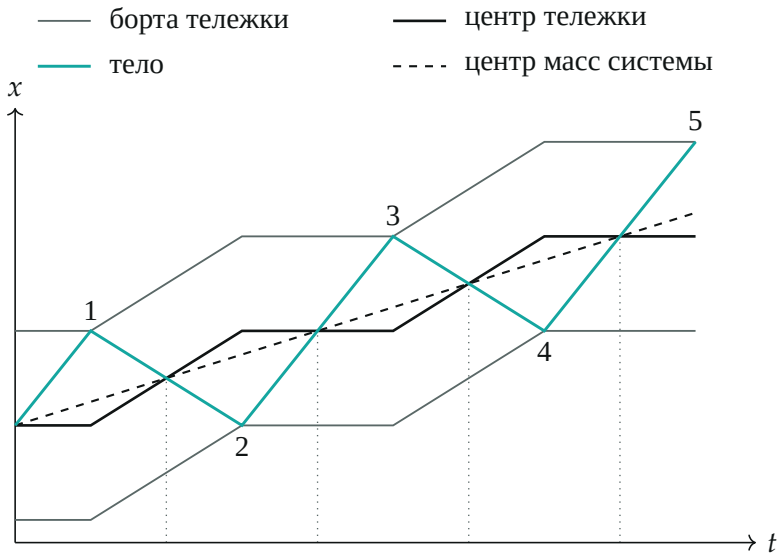
$$u_1 - w_1 = -(u_2 - w_2).$$

Относительная скорость после удара равна по модулю относительной скорости до него и противоположна по направлению; от масс это не зависит. Сразу после толчка она равна v (тележка покоится), значит, после

каждого удара она по модулю равна v и направление меняет на противоположное.

3. Время. Относительно тележки тело движется с постоянной по модулю скоростью v. Оно проходит $\frac{L}{2}$ до переднего борта (удар 1), затем L между бортами — 2019 раз (между ударами с 1-го по 2020-й), и после 2020-го удара (о задний борт, номер чётный) ещё $\frac{L}{2}$ до центра. Весь относительный путь равен $2020\,L$:

$$t = \frac{2020\,L}{v}.$$



Положения борта, центра тележки, тела и центра масс во времени (для $m = 1$, $M = 3$): тележка стоит, пока тело едет вперёд, и едет, пока тело идёт назад; номера — удары. В моменты, отмеченные пунктирными линиями, тело в центре тележки и центр масс совпадает с центром тележки

4. Перемещение тележки. В начале тело в центре тележки, и центр масс системы (тело плюс симметричная тележка) лежит в центре тележки. В конце тело снова в центре, значит, центр масс снова в центре тележки. Поэтому перемещение центра тележки равно перемещению цен-

тра масс за время t:

$$S = v_0\, t = \frac{mv}{m+M} \cdot \frac{2020\, L}{v} = \frac{2020\, mL}{m+M}.$$

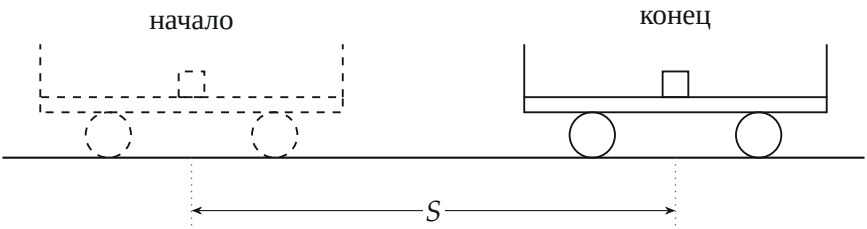


Схема: в начале и в конце тело в центре тележки, центр масс системы в обоих случаях в центре тележки, поэтому перемещение тележки S равно перемещению центра масс

5. Путь, а не перемещение. Найденное — перемещение тележки; нужен путь. Они совпадают, если тележка нигде не едет назад. Запишем скорость тела относительно стола как $w + u_{\text{отн}}$ и закон сохранения импульса $Mw + m(w + u_{\text{отн}}) = mv$, откуда

$$w = v_0 - \frac{m}{m+M}\, u_{\text{отн}}.$$

Относительная скорость равна $+v$ (тело едет к переднему борту) или $-v$ (к заднему), поэтому $w = 0$ или $w = 2v_0$, но не меньше нуля: тележка стоит, пока тело едет вперёд, и едет вперёд со скоростью $2v_0$, пока тело едет назад.

6. Второй способ: считаем рывки. Тележка движется со скоростью $2v_0 = \dfrac{2mv}{m+M}$ только тогда, когда тело идёт к заднему борту. Каждый такой проход длится $\dfrac{L}{v}$ и сдвигает тележку на

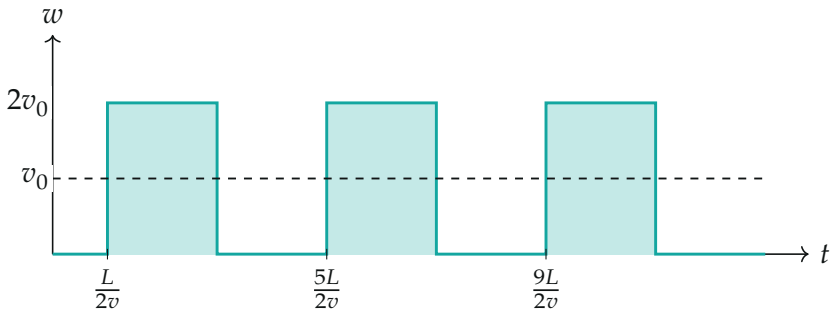
$$2v_0 \cdot \frac{L}{v} = \frac{2mL}{m+M}.$$

После ударов с нечётными номерами $1, 3, \ldots, 2019$ тело идёт назад —

это 1010 полных проходов (последний кончается ударом 2020); после 2020-го удара тело идёт вперёд, и тележка стоит. Итого

$$S = 1010 \cdot \frac{2mL}{m+M} = \frac{2020\,mL}{m+M},$$

как и в пункте 4.



Скорость тележки w в зависимости от времени: только значения 0 и $2v_0$, среднее значение — v_0; площадь каждого прямоугольника равна $2mL/(m+M)$. Отмечены моменты ударов о передний борт

Проверка. Размерность: $m/(m+M)$ безразмерно, $S \sim L$ — длина. Предельные случаи: если $M \to \infty$, то $S \to 0$ (тяжёлая тележка не двигается); если $m \gg M$, то $S \to 2020\,L$: тело почти не замечает лёгкую тележку и проходит по столу путь $vt = 2020\,L$, а тележка всё время остаётся под ним. Численное моделирование всех 2020 ударов при $m = 1$, $M = 3$, $L = 2$ даёт $S = 1010$, как по формуле. Смысл: центр масс едет равномерно, а то, что тело мечется внутри, меняет лишь положение тележки относительно него.

Ответ. $S = \dfrac{2020\,mL}{m+M}$.