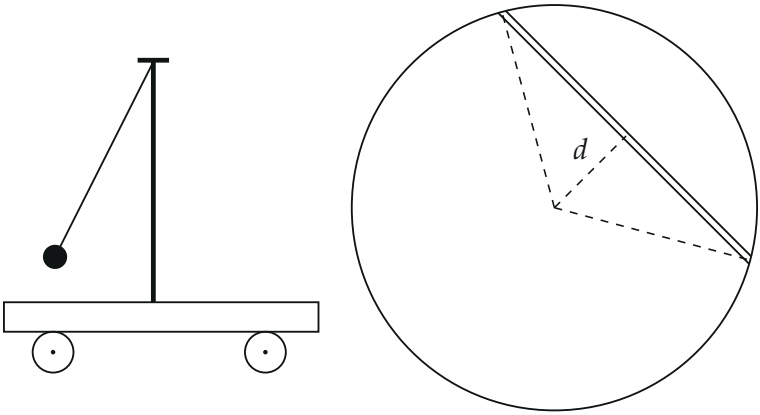
Маятник на тележке в туннеле

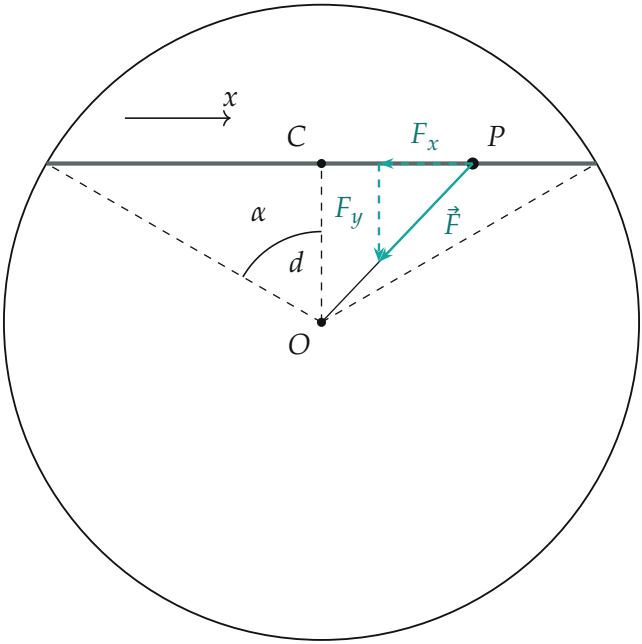
Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 11 класс, задача 5] На тележке укреплён математический маятник длины l. Тележку отпускают в туннель, прокопанный внутри Земли по такой хорде, что минимальное расстояние от центра Земли до туннеля равно половине радиуса Земли, $d = R/2$ (R — радиус Земли; см. рисунок). Сколько колебаний совершит маятник за то время, когда тележка пройдёт весь туннель? Радиус и масса Земли R и ускорение свободного падения на поверхности Земли известны. Плоскость колебаний маятника совпадает с направлением движения тележки.



▲ **Решение. Что происходит.** Здесь два связанных движения. Первое — движение тележки. Внутри однородной Земли сила тяжести растёт пропорционально расстоянию до центра, как сила пружины, поэтому тележка колеблется вдоль туннеля как груз на пружине; период такого колебания один и тот же для любой хорды, а от одного конца туннеля до другого тележка идёт ровно полпериода. Второе — маятник на ускоренной тележке. Тележка разгоняется ровно с тем ускорением, которое сообщила бы любому телу составляющая силы тяжести вдоль туннеля, поэтому вдоль туннеля маятник «невесом»: сила инерции в системе отсчёта тележки компенсирует эту составляющую. Остаётся составляющая силы тяжести, перпендикулярная туннелю, и она *постоянна*. Зна-

чит, маятник качается как обычный, только с другим ускорением свободного падения g'. Число колебаний — это время движения тележки, делённое на период маятника. Класс задачи — неинерциальная система отсчёта и эффективное ускорение свободного падения.

Обозначения. Земля — однородный шар, трения и сопротивления нет; тележка — точка, масса маятника много меньше массы тележки (иначе нить влияет на движение тележки); колебания маятника малые. O — центр Земли, C — точка туннеля, ближайшая к центру ($OC = d$), r — расстояние от центра до тележки, x — координата тележки вдоль туннеля, отсчитываемая от C; α — половина угла, под которым туннель виден из центра: $\cos\alpha = d/R = \frac{1}{2}$. m — масса тележки, m_0 — масса груза маятника, $g = GM/R^2$ — ускорение свободного падения на поверхности.



Сечение Земли: туннель — хорда, $OC = d$ — перпендикуляр из центра; на тележку в точке P действует сила тяжести $\vec{F}$, направленная к центру, её составляющая F_x вдоль туннеля и F_y поперёк

1. Сила тяжести внутри Земли. Однородный шар притягивает тело на расстоянии $r < R$ от центра так, как будто притягивает только шар радиуса r (слой снаружи силы не создаёт), а масса этого шара — $M\dfrac{r^3}{R^3}$. По закону всемирного тяготения

$$F = G\frac{mMr^3/R^3}{r^2} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{mr}{R} = mg\frac{r}{R},$$

сила направлена к центру Земли и пропорциональна r.

2. Движение тележки. Запишем второй закон Ньютона для тележки с маятником в проекции на ось x вдоль туннеля; сила реакции туннеля перпендикулярна оси и в проекцию не входит. Проекция силы тяжести (подобие треугольников на рисунке, $r_x = x$):

$$F_x = -F\frac{x}{r} = -mg\frac{x}{R}.$$

Поэтому

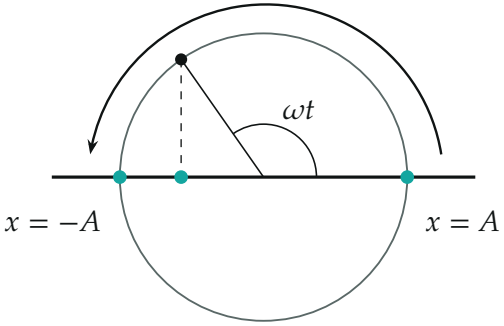
$$ma_x = -\frac{mg}{R}x \quad\Rightarrow\quad a_x = -\frac{g}{R}x.$$

Ускорение пропорционально смещению от C и направлено к C: это гармонические колебания с угловой частотой $\omega = \sqrt{g/R}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{R/g}$; длина хорды в них не входит. Тележку отпускают в конце туннеля, то есть в точке наибольшего смещения; в противоположный конец она придёт через полпериода:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Обратите внимание: считать длину туннеля не нужно, время от неё не зависит.

за время $t = \pi\sqrt{R/g}$ — полоборота



Движение тележки вдоль туннеля — проекция равномерного вращения точки по окружности с угловой скоростью $\omega = \sqrt{g/R}$ (радиус A — расстояние от C до конца туннеля); от одного конца до другого — ровно полоборота, при любой хорде

3. Маятник в системе отсчёта тележки. Запишем второй закон Ньютона для груза маятника в инерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй:

$$m_0\vec{a} = m_0\vec{g}_\text{м} + \vec{T},$$

где $\vec{g}_\text{м}$ — ускорение свободного падения в данной точке туннеля (по модулю gr/R, к центру), $\vec{T}$ — натяжение нити. Ускорение груза в системе Земли складывается из ускорения тележки $\vec{a}_\text{т}$ и ускорения относительно тележки $\vec{a}_\text{отн}$: $\vec{a} = \vec{a}_\text{т} + \vec{a}_\text{отн}$. Перенесём $\vec{a}_\text{т}$ вправо:

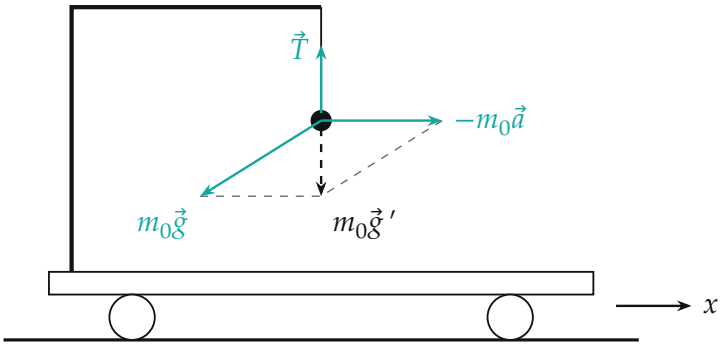
$$m_0\vec{a}_\text{отн} = \vec{T} + m_0\left(\vec{g}_\text{м} - \vec{a}_\text{т}\right).$$

Слагаемое $-m_0\vec{a}_\text{т}$ — это сила инерции в системе отсчёта тележки. Ускорение тележки направлено вдоль туннеля и по пункту 2 равно x-составляющей $\vec{g}_\text{м}$: $\vec{a}_\text{т} = g_{\text{м},x}\,\vec{e}_x$. Поэтому в разности $\vec{g}_\text{м} - \vec{a}_\text{т}$ продольные составляющие сокращаются, и остаётся составляющая, перпендикулярная туннелю, направленная к центру Земли:

$$\left|\vec{g}_\text{м} - \vec{a}_\text{т}\right| = g\,\frac{r_y}{R} = g\,\frac{d}{R} = g\cos\alpha = g'.$$

Здесь r_y — расстояние от центра до прямой туннеля; оно равно d в лю-

бой точке туннеля, поэтому g' *не меняется* при движении тележки. В системе отсчёта тележки маятник ведёт себя как в поле тяжести с ускорением g', направленным перпендикулярно туннелю.



Маятник в покое относительно тележки (в системе отсчёта тележки): сумма силы тяжести $m_0\vec{g}_м$ и силы инерции $-m_0\vec{a}_m$ направлена перпендикулярно туннелю и равна m_0g'; нить висит перпендикулярно туннелю в любой точке

4. Период маятника. Для малых колебаний математического маятника длины l в поле с ускорением g'

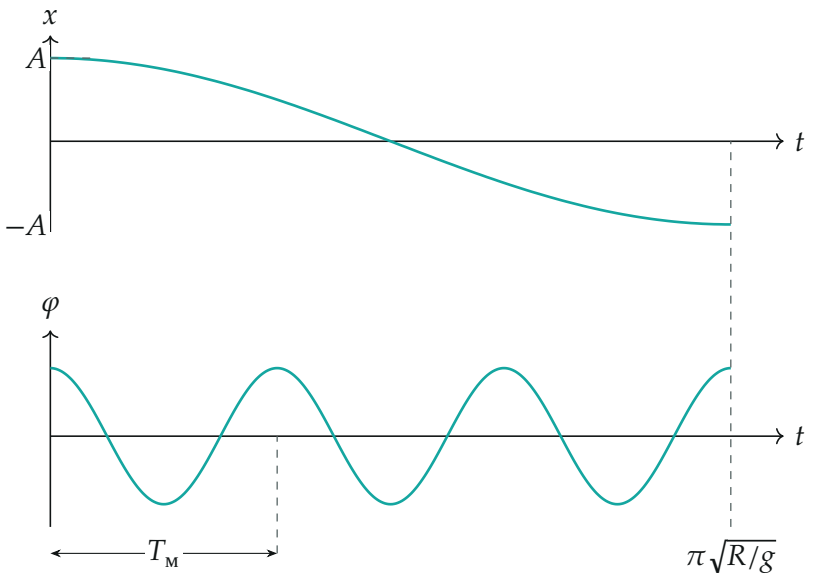
$$T_м = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{lR}{g\,d}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}},$$

так как $d = R/2$.

5. Число колебаний. Разделим время движения тележки по туннелю на период маятника:

$$N = \frac{t}{T_м} = \frac{\pi\sqrt{R/g}}{2\pi\sqrt{2l/g}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\cos\alpha}{l}}.$$

Число g сократилось, а число колебаний зависит только от отношения R к l. Например, для $R = 6400$ км и $l = 1$ м получается $N \approx 894$.



Для $l = R/72$: положение тележки (вверху) и отклонение маятника (внизу) за время прохождения туннеля; маятник совершает $N = 3$ колебания за полупериод колебания тележки

Проверка. Размерность: N безразмерно, $\sqrt{R/l}$ — отношение длин. Предельные случаи: если туннель проходит через центр ($d \to 0$), то $g' \to 0$ и $N \to 0$: вдоль диаметра всё на тележке падает свободно, и маятник не качается; если $d \to R$ (хорда почти касательная), то $g' \to g$ и $N \to \frac{1}{2}\sqrt{R/l}$ — маятник качается так, как у поверхности, а время $\pi\sqrt{R/g}$ у любой хорды одно и то же. Численная проверка: я проинтегрировал полные уравнения движения тележки с маятником (лагранжиан в поле $F = mgr/R$, масса маятника мала) при $d = R/2$, $l = R/72$ и получил ровно три колебания за время движения тележки по туннелю, как по формуле ($N = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$).

Ответ. $N = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R}{2l}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{d}{l}}$ колебаний.