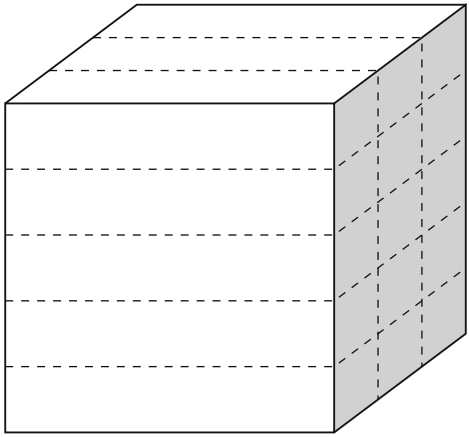
Покраска распиленного куба

Задача 2. [Росатом 2019/20, 7 класс, задача 2] Для покраски поверхности куба необходимо 580 мг краски. На кубе делают 6 разрезов, распиливая его на 15 равных частей (см. рисунок). Сколько понадобится краски, чтобы покрасить все непокрашенные грани полученных тел слоем такой же толщины?



▲ **Решение. Что происходит.** Толщина слоя краски одинакова, поэтому масса краски пропорциональна покрываемой площади. Задача сводится к подсчёту площади новых, ещё не покрашенных граней, которые появились при распиле. Класс задачи — оценка через пропорцию «масса краски $\propto$ площадь».

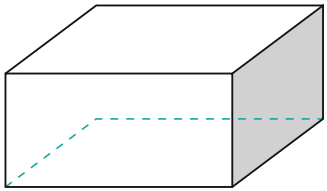
Обозначения. a — ребро куба, a^2 — площадь одной его грани, $m_0 = 580$ мг — краска на всю поверхность куба, m — искомая масса краски.

1. Краска на одну грань куба. Поверхность куба — 6 одинаковых граней площадью a^2, всего $6a^2$. При одинаковой толщине слоя на одну грань уходит шестая часть:

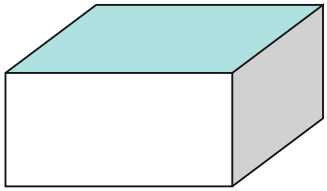
$$m_1 = \frac{m_0}{6}.$$

2. Что даёт один распил. Каждый разрез на рисунке проходит через весь куб параллельно одной из граней. Сечение куба такой плоскостью

— квадрат $a \times a$. После распила у этого квадрата появляются две непокрашенные стороны: одна у части по одну сторону разреза, другая — у части по другую сторону.



и ещё одна снизу



новая грань a^2

Один распил, части раздвинуты: новые грани — сверху у нижней части и снизу у верхней (пунктир — невидимые рёбра)

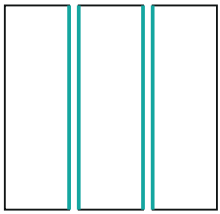
3. Сколько новых граней. По рисунку: 4 разреза параллельно нижней грани (куб делится на 5 слоёв) и 2 разреза параллельно передней грани (на 3 ломтя), всего $4 + 2 = 6$ разрезов и $5 \cdot 3 = 15$ частей. Каждый разрез даёт 2 новые грани площадью a^2:

$$N = 2 \cdot 6 = 12 \text{ граней}, \qquad S_{\text{нов}} = 12a^2.$$



$4 \times 2 = 8$

вид спереди: 5 слоёв



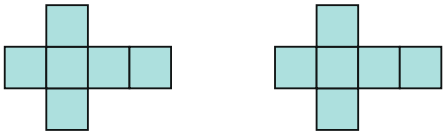
$2 \times 2 = 4$

вид сбоку: 3 ломтя

Части раздвинуты; бирюзой — новые грани (видны ребром): $8 + 4 = 12$ *граней площадью* a^2

4. Масса краски. Масса краски пропорциональна площади, на одну грань a^2 идёт $m_0/6$:

$$m = 12 \cdot \frac{m_0}{6} = 2m_0 = 2 \cdot 580 = 1160 \text{ мг} = 1{,}16 \text{ г}.$$



6 граней ещё 6 граней

Двенадцать новых граней складываются в две развёртки целого куба — значит, краски нужно вдвое больше, чем на куб

Обратите внимание. Число частей (15) в ответ не входит: важна не форма кусков, а сколько новых квадратов $a \times a$ появилось, а их даёт число разрезов. Грани, бывшие у куба снаружи, уже покрашены, их не считаем.

Проверка. Размерность: мг на грань, умноженные на число граней, — мг. Второй способ: полная поверхность 15 частей. Каждая часть — брусок $a \times \frac{a}{5} \times \frac{a}{3}$, его поверхность $2\left(\frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{15}\right) = \frac{6a^2}{5}$; у 15 частей $15 \cdot \frac{6a^2}{5} = 18a^2$. Из неё $6a^2$ уже покрашено, остаётся $12a^2$ — то же.

Ответ. 1160 мг (1,16 г) краски — вдвое больше, чем на весь куб.